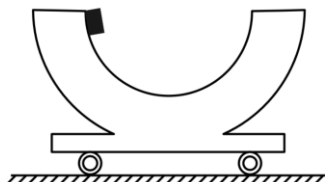


# МОШ, 2009/10, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

## 1 Монета в чаше на столе

На гладком горизонтальном столе находится чаша массой  $M$  с полусферической выемкой радиусом  $R$  с гладкими стенками (смотри рисунок). На самый край выемки чаши поместили монету массой  $m$ , размеры которой значительно меньше размеров выемки. В начальный момент монета и чаша друг относительно друга не двигались. Монету и чашу одновременно отпустили. С каким ускорением движется монета, проходя самое нижнее положение?



### Подсказка

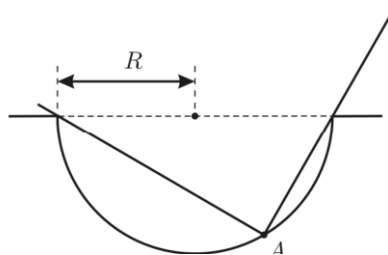
Горизонтальный импульс системы сохраняется, и энергия тоже. В нижней точке удобно перейти в систему отсчёта чаши: там монета движется по окружности радиуса  $R$ , а сама чаша в этот момент не ускоряется по горизонтали.

### Ответ

$$a = \frac{2g(M + m)}{M}, \text{ ускорение направлено вертикально вверх.}$$

## 2 Муравей и проволочный мостик

В горизонтальной крышке стола пропилена полуцилиндрическая канавка радиусом  $R = 20$  см. Ось канавки совпадает с верхней плоскостью крышки стола. На краю канавки сидит муравей, который хочет перебраться через нее. Школьник решил помочь муравью, сделав мостик из прямых отрезков проволоки. Но все куски проволоки, которые были в распоряжении школьника, имели длину  $L = 38$  см. Тогда школьник сделал мостик из двух проволок, расположив их так, как показано на рисунке, причем точку  $A$ , в которой концы проволок воткнуты в дно канавки, он выбрал случайным образом. Муравей может ползти вверх по проволоке с постоянной скоростью  $V = 0,5$  см/с, а вниз – с постоянной скоростью  $2V = 1$  см/с. Найдите максимальное время и минимальное время, за которое муравей сможет перебраться через канавку по такому мостику.



**Подсказка**

Проволока, один конец которой на краю канавки, а другой в точке  $A$  на окружности, — хорда; её длина и угол к горизонту связаны с положением  $A$ . Сколько проволоки приходится на подъём, а сколько на спуск, и как это зависит от положения  $A$ ?

**Ответ**

$$t_{\max} = \frac{R\sqrt{5}}{V} \approx 90 \text{ с}; \quad t_{\min} = \frac{R}{20V} (19 + 2\sqrt{39}) \approx 63 \text{ с}.$$

### 3 Газ в сосуде с подвижным поршнем

Горизонтальный сосуд с газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было равно  $p_0$ , а температура  $T_0$ . Нагревая газ в левой части сосуда до температуры  $T_0 + \Delta T$ , исследуют зависимость давления в системе  $p$  от параметра  $x = \Delta T/T_0$ . Эта зависимость оказалась линейной:  $p = p_0(1 + \alpha x)$  с параметром  $\alpha = 0,5$ . Найдите отношение  $k = \nu_1/\nu_2$  количеств газа в левой и правой частях сосуда. Температура в правой части сосуда поддерживается постоянной, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

**Подсказка**

Поршень подвижен, поэтому давления в обеих частях всегда одинаковы. Запишите уравнение состояния для каждой части и учтите, что полный объём сосуда не меняется.

**Ответ**

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = 1.$$

### 4 Три концентрические сферы с жидкостями

Имеются три концентрические хорошо проводящие металлические сферы 1, 2 и 3 радиусами  $R$ ,  $2R$  и  $3R$ . Пространство между первой и второй сферами заполнено жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и удельным сопротивлением  $11\rho$ , а между второй и третьей — жидкостью с диэлектрической проницаемостью  $11\varepsilon$  и удельным сопротивлением  $\rho$ . Между внутренней и внешней сферами при помощи батарейки поддерживается постоянная разность потенциалов  $U$ . Чему равен заряд  $q_2$  средней сферы? Какова сила тока  $I$ , который течет при этом в цепи?

**Подсказка**

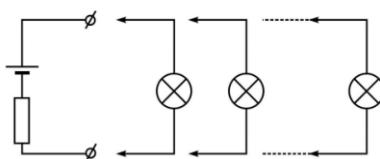
Сопротивления слоёв жидкости идут последовательно; найдите их интегрированием по тонким сферическим слоям. Заряд средней сферы определяется скачком нормальной составляющей поля на ней.

**Ответ**

$$q_2 = 0, \quad I = \frac{12\pi RU}{17\rho}.$$

## 5 Источник питания и лампочки

Школьник Вася присоединяет к источнику питания, схема которого изображена на рисунке, электрические лампочки. Присоединив к источнику одну электрическую лампочку, Вася обнаружил, что на ней выделяется мощность  $P$ . Присоединив к источнику четыре такие же лампочки, соединенные параллельно, Вася обнаружил, что на них вместе также выделяется мощность  $P$ . Какая мощность  $P_n$  будет выделяться на лампочках, когда Вася подсоединит к источнику питания  $n$  параллельно соединенных лампочек? Считайте, что сопротивление лампочки не зависит от силы тока.



**Подсказка**

Источник эквивалентен ЭДС с внутренним сопротивлением  $r$ . Условие равенства мощностей для одной и четырёх ламп связывает  $r$  с сопротивлением лампы.

**Ответ**

$$P_n = \frac{9Pn}{(n+2)^2}.$$

## 6 Верёвка на колонне

Тонкую гладкую однородную веревку массой  $m$  и длиной  $L$  расстелили на горизонтальной поверхности, обернув на половину оборота вокруг вертикальной цилиндрической колонны радиусом  $R \ll L$ . Первоначально веревку тянули за оба конца, находившиеся на одинаковом расстоянии от колонны, с одинаковой силой  $\vec{F}$ , затем один из концов отпустили, продолжая действовать с той же силой на другой ее конец. В течение какого времени  $t$  после этого длина участка веревки, соприкасающегося с колонной, будет оставаться неизменной?

**Подсказка**

Пока веревка гладкая и натянута, она скользит по колонне, не меняя длины контакта. Когда именно сила, прижимающая её к колонне, обратится в нуль?

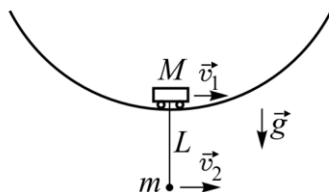
**Ответ**

Длина участка веревки, соприкасающегося с колонной, начнет уменьшаться из-за отрыва веревки от колонны спустя время  $t \approx \sqrt{\frac{mL}{3F}}$  после старта.

Примечание организаторов: условие  $R \ll L$  вовсе не обязательно; в общем случае  $t = \sqrt{\frac{mL}{3F} \left(1 - \frac{\pi R}{L}\right)}$ .

## 7 Вагонетка с грузом на вогнутом мосту

По вогнутому мосту, образующему дугу окружности радиусом  $R$ , движется вагонетка массой  $M$ . К вагонетке привязан трос длиной  $L$ , на конце которого закреплён груз массой  $m$  (см. рисунок). В момент, когда вагонетка проходила нижнюю точку моста, трос был расположен вертикально, а скорости вагонетки и груза были равны  $v_1$  и  $v_2$  соответственно. Найдите в этот момент силу натяжения троса  $T$  и силу  $N$ , с которой вагонетка давит на рельсы. Трос невесом и нерастяжим, трение не учитывать, размерами вагонетки и груза пренебречь.



### Подсказка

Груз движется относительно вагонетки по окружности радиуса  $L$  со скоростью  $v_2 - v_1$ ; в системе вагонетки (неинерциальной) к нему добавляется сила инерции.

### Ответ

$$T = m \left( g + \frac{v_1^2}{R} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{L} \right); \quad N = (m + M) \left( g + \frac{v_1^2}{R} \right) + m \frac{(v_1 - v_2)^2}{L}.$$

## 8 КПД «Камаза» и цикл Дизеля

Автомобиль «Камаз» проехал из Санкт-Петербурга в Москву за время  $t = 16$  часов, пройдя по дороге 720 км и истратив объем  $V = 200$  л дизельного топлива. Двигательная установка автомобиля состоит из дизельного двигателя внутреннего сгорания, трансмиссии и шасси.

Найдите КПД (эффективность) автомобиля и его среднюю механическую мощность на всем пути, считая, что механические потери в трансмиссии и шасси составляют  $\alpha = 5\%$ , а двигатель работает по циклу Дизеля, рабочим телом которого является идеальный трехатомный газ (теплоемкость одного моля такого газа в изохорном процессе равна  $C_V = 3R$ ). Цикл Дизеля состоит из четырёх процессов: адиабатного сжатия рабочего тела, изобарного подвода теплоты к рабочему телу, адиабатного расширения рабочего тела и его изохорного охлаждения, в конце которого осуществляется выпуск продуктов сгорания топлива в атмосферу. Удельная теплота сгорания дизельного топлива  $q = 42$  МДж/кг, а его плотность  $\rho = 0,82$  кг/л. Максимальный объем камеры сгорания – 6000 мл, минимальный – 375 мл, максимальный объем в изобарном процессе – 1500 мл, максимальное давление – 40 атм, максимальное давление при изохорном охлаждении – 6 атм.

### Подсказка

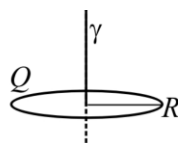
Выразите КПД цикла через отношение отданного и полученного тепла, используя  $C_V = 3R$  и то, что точки 1 и 4 лежат на одной изохоре, а 2 и 3 на одной изобаре. Затем учтите потери в трансмиссии и теплоту сгорания топлива.

**Ответ**

КПД автомобиля  $\eta_a = \left(1 - \frac{3(p_4 - p_1)V_1}{4p_2(V_3 - V_2)}\right) (1 - \alpha) = 0,475 = 47,5\%$ ; средняя механическая мощность  $N = \frac{q\rho V(1 - \alpha)}{t} \left(1 - \frac{3(p_4 - p_1)V_1}{4p_2(V_3 - V_2)}\right) \approx 56,8 \text{ кВт} \approx 78 \text{ л.с.}$

## 9 Кольцо и заряженная нить

Тонкое кольцо радиусом  $R$  заряжено зарядом  $Q$ , равномерно распределенным по кольцу. Вдоль оси кольца расположена очень длинная нить, начинающаяся в его центре и равномерно заряженная с линейной плотностью заряда  $\gamma$  (см. рисунок). Найдите модуль силы электростатического взаимодействия нити с кольцом.



**Подсказка**

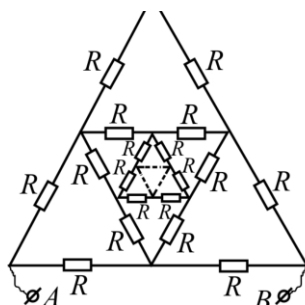
Проще найти силу, с которой поле кольца действует на нить: проинтегрируйте  $\gamma E(z) dz$  вдоль оси, или через потенциал кольца на оси.

**Ответ**

$$F = \frac{\gamma Q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

## 10 Бесконечная цепь из резисторов

Найдите сопротивление между клеммами  $A$  и  $B$  бесконечной цепи, схема которой изображена на рисунке. Сопротивление каждого резистора равно  $R$ .



**Подсказка**

Цепь самоподобна: внутренняя часть повторяет всю схему в уменьшенном виде. Замените её эквивалентным сопротивлением и составьте уравнение для  $R_{AB}$ .

**Ответ**

$$R_{AB} = \frac{2}{\sqrt{3}} R.$$

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2009/10, заключительный этап, 10 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.