

МОШ, 2009/10, заключительный этап, 11 класс

[Условия, ответы и решения](#)

1 Муравьишка на кирпиче (11 класс)

Кирпич с размерами $a \times a \times a\sqrt{11}$ поставили на квадратную грань так, что его длинные ребра оказались вертикальными. На одном из верхних углов кирпича находится Муравьишка, который может ползать по вертикальным граням кирпича со скоростью v , а по горизонтальной грани — с некоторой другой постоянной скоростью. Вдоль ребер кирпича он ползать не умеет, но может их пересекать. Муравьишка переполз на максимально удаленный от него угол кирпича. При этом он пересекал одно из ребер кирпича только один раз и строго посередине, а время, которое он затратил на путешествие, оказалось минимально возможным. Чему равно время t его путешествия? С какой скоростью u Муравьишка может ползать по горизонтальной грани кирпича?

Подсказка

Развёртка похожа на преломление света: путь по двум граням с разными скоростями, минимальное время достигается при выполнении закона, аналогичного закону Снеллиуса.

Ответ

$$t = \frac{5a\sqrt{5}}{3v}; \quad u = 3v.$$

2 Газ в сосуде, адиабата справа

Горизонтальный сосуд с идеальным одноатомным газом разделен на две части подвижным вертикальным поршнем, не проводящим тепло. Вначале давление в сосуде было равно p_0 , а температура T_0 . Нагревая газ в левой части сосуда до температуры $T_0 + \Delta T$, исследуют зависимость давления в системе p от параметра $x = \Delta T/T_0$. Эта зависимость при малых x оказалась линейной: $p = p_0(1 + \alpha x)$ с параметром $\alpha = 0,5$. Найдите отношение $k = \nu_1/\nu_2$ количеств газа в левой и правой частях сосуда. Процесс в правой части сосуда адиабатный, трением между поршнем и стенками сосуда можно пренебречь.

Подсказка

Давление слева и справа одинаково. Запишите уравнение состояния для левой части и адиабату для правой при малых изменениях, выразив через них Δp и ΔV .

Ответ

$$k = \frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{3}{5} \cdot \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

3 Блок питания и конденсатор

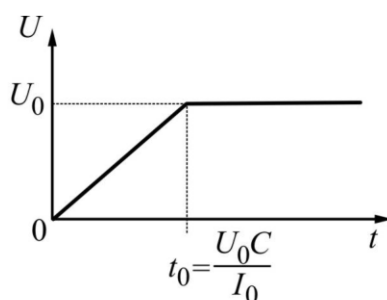
Современный лабораторный блок питания работает так: сначала ему задаются значения тока I_0 и напряжения U_0 . После подключения нагрузки блок сам выбирает один из двух режимов: либо поддерживает напряжение на нагрузке равным U_0 , если при этом ток через нагрузку не больше I_0 — либо поддерживает ток через нагрузку равным I_0 , если при этом напряжение на нагрузке не больше U_0 . В качестве нагрузки к такому блоку питания подсоединяют незаряженный конденсатор емкостью C . Нарисуйте график зависимости напряжения U на нем от времени t .

Подсказка

Пока конденсатор разряжен, напряжение мало, и блок держит ток I_0 . Когда напряжение дойдёт до U_0 , режим сменится.

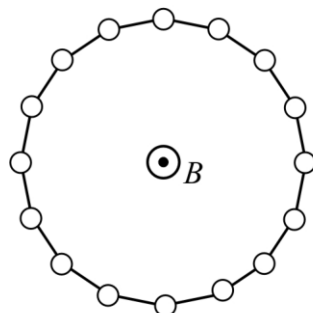
Ответ

График приведён на рисунке: напряжение растёт линейно от нуля до U_0 за время $t_0 = U_0 C / I_0$, далее остаётся равным U_0 .



4 Кольцо заряженных шариков в выключаемом поле

На гладкой горизонтальной плоскости лежат N маленьких одинаково заряженных шариков равной массы (см. рисунок). Суммарный заряд шариков Q , суммарная масса M . Шарiki связаны друг с другом непроводящей легкой нерастяжимой нитью, образуя кольцо. Длина нити между двумя соседними шариками равна l . Система находится в вертикальном магнитном поле B , причем суммарный поток магнитной индукции, пронизывающий кольцо, равен Φ_0 . Изначально все шарiki покоятся. В некоторый момент магнитное поле выключают. Найдите изменение ΔF силы натяжения нити после выключения поля.



Подсказка

При выключении поля возникает вихревое электрическое поле, раскручивающее шарики. Найдите скорость шариков из импульса силы, затем сравните силы натяжения до и после.

Ответ

$$\Delta F = \frac{Q^2 \Phi_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{N}}{\pi^2 M N l^3}.$$

5 Размытость на снимке

Взяв старый пленочный фотоаппарат, школьник Вася отправился фотографировать соревнования по легкой атлетике. Сделав достаточное количество фотографий с разными выдержками, Вася обнаружил, что спортсмены, пробегавшие на расстоянии $a_0 = 10$ м от фотоаппарата перпендикулярно оптической оси объектива, получались на снимках четкими, если затвор фотоаппарата открывался на время, не превосходящее $\tau = 0,001$ с. При этом неподвижные предметы, расположенные на расстояниях менее $a_1 = 5$ м от фотоаппарата, получались размытыми. Определите диаметр D объектива фотоаппарата. Скорости спортсменов считайте равными $v = 10$ м/с.

Подсказка

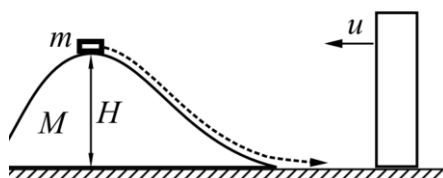
Допустимая размытость на плёнке одна и та же в обоих случаях: сравните смещение изображения за время τ с размером пятна от расфокусировки.

Ответ

$$D = \frac{v\tau}{(a_0/a_1) - 1} = 1 \text{ см.}$$

6 Шайба, горка и движущаяся стенка

На гладкой горизонтальной плоскости покоится гладкая горка высотой H и массой M , а на ее вершине лежит небольшая шайба массой m (см. рисунок). После легкого толчка шайба скатывается с горки и скользит перпендикулярно массивной вертикальной стенке, движущейся по плоскости в сторону горки со скоростью u . Испытав абсолютно упругое столкновение со стенкой, шайба скользит в обратном направлении, к горке. С какой минимальной скоростью u должна двигаться стенка, чтобы шайба смогла преодолеть горку?



Подсказка

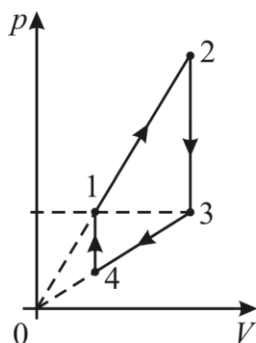
Найдите скорости шайбы и горки после спуска из законов сохранения импульса и энергии, затем перейдите в систему отсчёта стенки, где удар упругий.

Ответ

$$u = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2gH}{1 + (m/M)}}.$$

7 КПД цикла с линейными участками

На pV -диаграмме представлен цикл 1–2–3–4, который проводится с идеальным одноатомным газом. Участки 2–3 и 4–1 цикла соответствуют изохорным процессам, на участках 1–2 и 3–4 цикла давление газа изменяется прямо пропорционально его объему. Давление газа в состояниях 1 и 3 одинаково. Найдите КПД этого цикла, если отношение максимального объема газа к его минимальному объему равно $n = 1,5$.



Подсказка

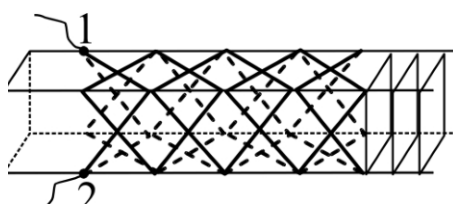
Выразите давления и объёмы всех состояний через p_1 , V_1 и n ; работу цикла найдите как площадь, а подвод тепла — на участках, где газ нагревается.

Ответ

$$\eta = \frac{n^2 - 1}{4n^2 + 4n + 3} = \frac{5}{72} \approx 0,07.$$

8 Бесконечный «чулок» из проволоки

На длинный (полубесконечный) деревянный брусок намотаны восемь одинаковых длинных проволок, начала которых попарно соединены, как показано на рисунке. Найдите сопротивление R_{12} между точками 1 и 2 этой бесконечной цепи в виде «чулка», надетого на брусок, если сопротивление участка провода, находящегося между двумя соседними пересечениями проволок, равно R . Во всех точка пересечения между проволоками имеется электрический контакт.



Подсказка

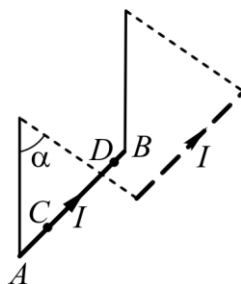
Используйте симметрию: точки одинакового потенциала можно объединить, и бесконечная цепь сведётся к самоподобной.

Ответ

$$R_{12} = \sqrt{2} R.$$

9 Стержень на подвесах в магнитном поле

Тяжелый металлический стержень AB подвешен в горизонтальном положении на двух легких вертикальных проводах в лаборатории, где в некотором объеме создано однородное магнитное поле, линии индукции которого вертикальны. Участок CD стержня все время находится в магнитном поле, а провода-подвески — вне поля. В первом опыте на стержень подали напряжение, и в нём очень быстро возник ток силой I . Максимальный угол, на который подвески стержня отклонились от вертикали, был при этом равен $\alpha = 60^\circ$. Во втором опыте силу тока через стержень плавно увеличивали от нуля до того же значения I . На какой угол β отклонились подвески во втором опыте?



Подсказка

В первом опыте сила Ампера действует кратковременно: используйте импульс силы и закон сохранения энергии. Во втором — равновесие сил.

Ответ

$$\beta = \arctg\left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}\right) = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ.$$

10 Две линзы и прямоугольник

Две собирающие линзы с фокусными расстояниями $f_1 = 20$ см и $f_2 = 10$ см расположены на одной прямой так, что их главные оптические оси совпадают. Эта система линз формирует действительное изображение прямоугольника со сторонами $a_1 = 1$ мм и $b_1 = 2$ мм, также являющееся прямоугольником. Сторона a_1 прямоугольника лежит на главной оптической оси системы. На каком расстоянии L друг от друга расположены линзы? Каковы размеры изображения a_2 и b_2 ?

Подсказка

Чтобы изображение осевого и поперечного размеров осталось прямоугольником, система должна быть телескопической. Какое расстояние между линзами этому соответствует?

Ответ

Расстояние между линзами $L = f_1 + f_2 = 30$ см; размеры изображения $a_2 = a_1 \left(\frac{f_2}{f_1} \right)^2 = 0,25$ мм и $b_2 = b_1 \frac{f_2}{f_1} = 1$ мм, или $a_2 = a_1 \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 = 4$ мм и $b_2 = b_1 \frac{f_1}{f_2} = 4$ мм.