

МОШ, 2009/10, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Почтальон Печкин и посылка

Почтальон Печкин выехал из райцентра Сметанино в деревню Простоквашино с посылкой для кота Матроскина. Он ехал со скоростью 15 км в час, а расстояние, которое ему надо было проехать, составляет 15 км. Приехав в Простоквашино, он обнаружил, что по дороге потерял посылку, и сразу же поехал за ней обратно. Когда он нашел посылку, то подобрал ее и снова поехал к коту. Тем временем кот Матроскин, который хотел как можно быстрее получить посылку, сразу после выезда Печкина из Простоквашино побежал за почтальоном со скоростью 5 км в час, и получил посылку через полчаса из рук Печкина, который уже снова ехал в Простоквашино. На каком расстоянии от Сметанино Печкин потерял посылку?

Подсказка

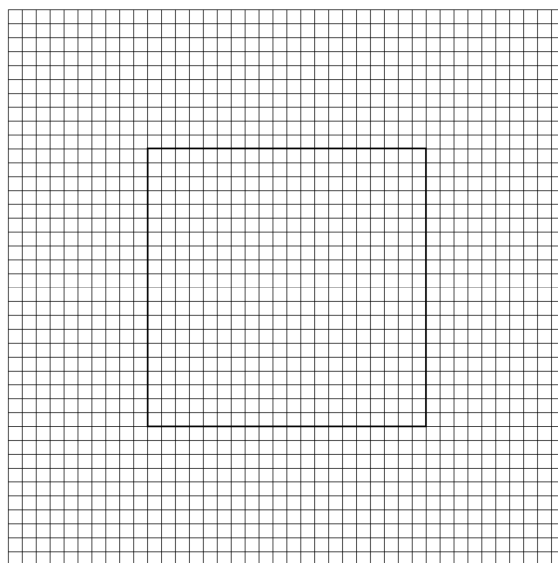
Печкин и Матроскин за полчаса вместе проехали и пробежали одно и то же расстояние между встречей и деревней, но в разные стороны. Где в этот момент находится Печкин и сколько времени он ехал до встречи?

Ответ

Печкин потерял посылку на расстоянии $x = L - t \cdot \frac{v + V}{2} = 10$ км от Сметанино.

2 Вспашка квадратного поля трактором

На соревнованиях пахарей надо было как можно быстрее обработать трактором с навесными орудиями (боронами шириной 10 м) квадратный участок поля площадью 1 гектар (т.е. $100 \times 100 \text{ м}^2$). Трактор при этом мог двигаться только вперед со скоростью 2 м/с и совершать повороты с минимальным радиусом 10 м (по центру трактора) на той же скорости. Вне поля достаточно места для любых разворотов, и вся площадь поля должна быть проборонована. Предложите и нарисуйте на прилагаемом листе траекторию движения трактора, при движении по которой время, необходимое для обработки поля, будет как можно меньшим. Рассчитайте, чему равно это время.



Масштаб на листе: в 1 см — 10 м.

Подсказка

Ширина захвата равна 10 м, так что поле надо пройти десятью параллельными проходами. Время зависит от того, как короче развернуться вне поля между проходами: подумайте, чем разворот только дугами радиуса 10 м выгоднее петли.

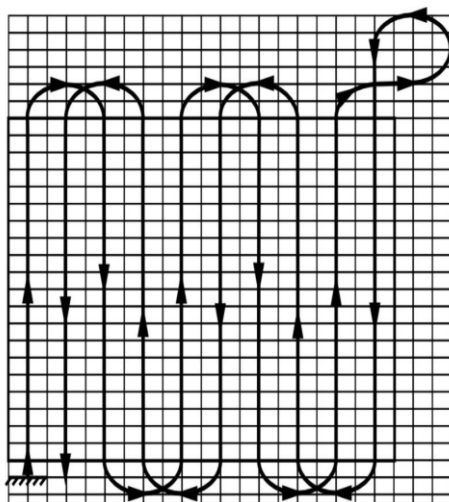
Ответ

Лучший из предложенных организаторами вариант (разворот только из дуг): $t \approx 655,8 \text{ с} \approx 10 \text{ мин. } 56 \text{ с.}$

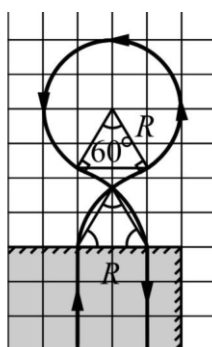
Решение

Существует несколько вариантов, которые отличаются способами разворота.

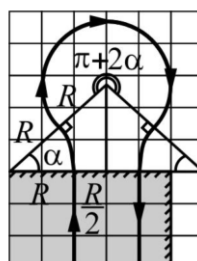
Вариант 1 — разворот в виде петли, смещенной в сторону (рис. 1): $t = 672 \text{ с} = 11 \text{ мин. } 12 \text{ с.}$



Вариант 2 — разворот в виде несмещенной петли (рис. 2): $t \approx 668,1 \text{ с} \approx 11 \text{ мин. } 08 \text{ с.}$



Вариант 3 — разворот состоит только из дуг поворотов: вначале на угол $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41,4^\circ$ влево, затем на угол $\pi + 2\alpha \approx 262,8^\circ$ вправо, и в конце снова на угол $\alpha \approx 41,4^\circ$ влево (рис. 3). При этом $t \approx 655,8 \text{ с} \approx 10 \text{ мин. } 56 \text{ с}$.



3 Бочки на рычаге с двумя опорами

На легком горизонтальном рычаге с двумя опорами находятся пустые легкие бочки. Расстояние от оси левой бочки до левой опоры $a = 2$ метра, от оси правой бочки до правой опоры — $c = 3$ метра, расстояние между опорами $b = 1$ метр. В обе бочки одновременно начинают наливать с небольшой скоростью воду из разных кранов. Как должны соотноситься скорости v_1 и v_2 наполнения бочек, то есть массы воды, поступающие в единицу времени в каждую бочку, чтобы система оставалась в равновесии?

Подсказка

Рычаг не должен опрокинуться ни вокруг левой, ни вокруг правой опоры: запишите условие для моментов сил относительно каждой из опор.

Ответ

Скорости v_1 и v_2 наполнения бочек должны удовлетворять условиям $\frac{1}{2} < \frac{v_2}{v_1} < 1$.

4 Винни-Пух и шарик с тёплым воздухом

В известном мультфильме про Винни-Пуха есть явное несоответствие: Винни-Пух надувает воздушный шарик обычным воздухом и взлетает на нём. Для того, чтобы воздушный шарик поднимался (а тем более поднимал Винни-Пуха), нужно, чтобы он был наполнен лёгким газом, плотность которого меньше плотности окружающего воздуха. Можно предположить, что Винни-Пух надувает шарик тёплым воздухом, плотность которого, как известно, меньше плотности холодного. Рассчитайте, каким должен быть в этом случае минимальный необходимый для подъёма объём шарика, если плотность тёплого воздуха внутри $\rho_1 = 1,13$ кг/м³, плотность холодного воздуха снаружи $\rho_2 = 1,29$ кг/м³, а масса Винни-Пуха $m = 5$ кг.

Подсказка

Шарик начнёт подниматься, когда архимедова сила, действующая на него, сравняется с суммой сил тяжести Винни-Пуха и тёплого воздуха внутри шарика (массой оболочки пренебрегаем).

Ответ

$$V = \frac{m}{\rho_2 - \rho_1} = 31,25 \text{ м}^3.$$