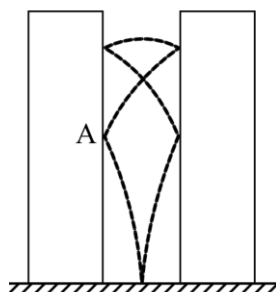


МОШ, 2009/10, заключительный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Мяч в арке

В арке около одной из стен стоит мальчик и бросает мяч из точки А, находящейся на высоте $h = 170$ см над землёй. Начальная скорость мяча $v_0 = 15$ м/с. Мяч вернулся в точку бросания спустя $t = 3$ с, описав траекторию, показанную на рисунке. Чему равно расстояние D между стенами арки? Все соударения мгновенные и абсолютно упругие, сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Подсказка

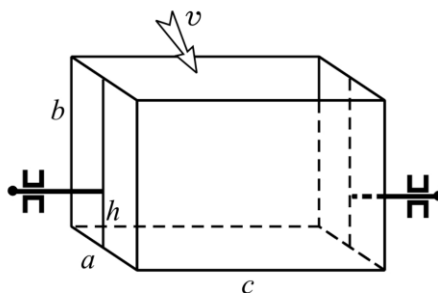
При упругом ударе о вертикальную стену горизонтальная составляющая скорости меняет знак, а вертикальная не меняется. Что тогда можно сказать о вертикальном движении мяча за всё время полёта?

Ответ

$$D = \frac{t}{4} \sqrt{v_0^2 + 2gh - \frac{g^2 t^2}{4}} \text{ (возможны и другие формы записи).}$$

2 Опрокидывание чаши с водой

Легкая тонкостенная чаша в виде прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер a , b и c свободно подвешена на горизонтальной оси так, что нижняя грань чаши с размерами $a \times c$ горизонтальна, а верхняя открыта (то есть отсутствует — см. рисунок). Ось проходит перпендикулярно граням параллелепипеда с размерами $a \times b$ в плоскости их симметрии на расстоянии $h < b/2$ от нижней грани $a \times c$. Чаша начинает наполняться водой со скоростью v м³/с. Через какое время чаша опрокинется, повернувшись вокруг оси? Что с ней будет происходить в дальнейшем, если скорость наполнения не меняется?



Подсказка

Пока центр масс воды ниже оси, чаша устойчива. Когда он поднимется до уровня оси, равновесие нарушится. Что произойдет, когда вода выльется?

Ответ

Чаша опрокинется через время $T = \frac{2hac}{v}$, а затем будут происходить колебания: с периодом T вода будет сначала заполнять чашу, а потом выливаться из неё.

3 Перелив воды между бочками

В двух одинаковых бочках находится одинаковое количество воды. Температура воды в первой бочке $t_1 = 20^\circ\text{C}$, а во второй бочке $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Из первой бочки перелили некоторое количество воды во вторую, и в ней установилась температура $t = 50^\circ\text{C}$. Затем из второй бочки перелили такое же количество воды в первую так, что воды в бочках снова стало поровну. Какая температура установится в первой бочке? Всеми потерями тепла во внешнюю среду и механической работой, совершенной при переливании воды, пренебречь.

Подсказка

Не нужно искать массу перелитой воды: достаточно записать, что суммарная энергия воды в двух бочках не меняется, и учесть, что массы воды в бочках после переливаний снова равны.

Ответ

$$t_0 = t_2 + t_1 - t = 30^\circ\text{C}.$$

4 Блок питания с ограничением тока

Современный лабораторный блок питания работает так: сначала ему задаются значения тока I_0 и напряжения U_0 . После подключения нагрузки блок сам выбирает один из двух режимов: либо поддерживает напряжение на нагрузке равным U_0 , если при этом ток через нагрузку не больше I_0 — либо поддерживает ток через нагрузку равным I_0 , если при этом напряжение на нагрузке не больше U_0 . При каком сопротивлении нагрузки R в ней будет выделяться наибольшая мощность $W_{\max}$ и чему она равна?

Подсказка

Выразите мощность на нагрузке через R отдельно для каждого из двух режимов и найдите, при каких R работает тот или иной режим.

Ответ

При сопротивлении нагрузки $R = U_0/I_0$ в ней выделяется максимальная мощность $W_{\max} = I_0 U_0$.

5 Конус на столе

На горизонтальном столе лежит на боку однородный конус массой m с радиусом основания R и углом при вершине 2α . Для того, чтобы медленно поставить конус на вершину в положение, при котором его ось вертикальна, нужно совершить работу A . Какую минимальную работу A_1 нужно совершить для того, чтобы из исходного положения поставить конус на основание?

Подсказка

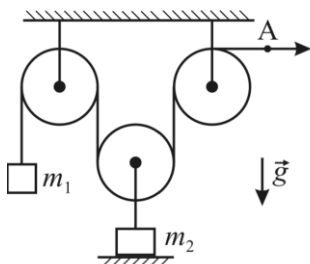
Работа при медленном подъёме равна приращению потенциальной энергии центра масс. Минимальная работа достигается, когда конус доводится до положения неустойчивого равновесия (центр масс над ребром опоры), после чего он опрокидывается сам.

Ответ

$$A_1 = mgR \sqrt{1 + \left(\operatorname{ctg} \alpha - \frac{A}{mgR(1 - \sin \alpha)} \right)^2} - \frac{A \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

6 Сила на нити, груз на подставке

Какую силу F в горизонтальном направлении надо приложить к концу нити в точке А системы, изображенной на рисунке, чтобы груз массой m_2 не отрывался от подставки, а нить, к другому концу которой прикреплен груз массой m_1 , оставалась натянутой? Каким при этом может быть ускорение $\vec{a}$ груза m_1 ? Нить невесома и нерастяжима, блоки невесома, трение отсутствует, ускорение свободного падения равно g .



Подсказка

Нить везде одна и та же, значит, и сила натяжения F везде одинакова. Подвижный блок неведом: сколько нитей тянет груз m_2 вверх? Что должно выполняться, чтобы нить оставалась натянутой?

Ответ

$$0 < F \leq \frac{m_2 g}{2}, \quad -g < a \leq g \left(\frac{m_2}{2m_1} - 1 \right), \text{ где } a > 0 \text{ соответствует направлению вектора } \vec{a} \text{ вверх.}$$

7 Смесь воды и пара под поршнем

В цилиндре под поршнем находятся вода и водяной пар при температуре 100°C . Снаружи цилиндра — вакуум, на поршне стоит груз массой $m = 100$ кг, позволяющий создать внутри цилиндра давление $p = 10^5$ Па. Какое количество теплоты Q следует сообщить смеси, чтобы поднять гирю на высоту $h = 1$ м от начального положения? Удельная теплота парообразования воды $L = 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, плотность водяного пара при 100°C равна $\rho = 0,58$ кг/м³.

Подсказка

Температура и давление остаются постоянными, пока есть вода: всё тепло идёт на испарение и на работу против груза. Найдите, сколько пара должно образоваться, чтобы объём вырос на нужную величину.

Ответ

$$Q = \frac{L\rho}{p} mgh \approx 13 \text{ кДж.}$$

8 Омметр из батарейки и миллиамперметра

Вова и Дима решили изготовить прибор для измерения сопротивления резисторов — «омметр». Для этого они взяли батарейку с известным постоянным напряжением $U = 1,5$ В, резистор с известным сопротивлением $R = 150$ Ом, миллиамперметр с диапазоном от 0 мА до 20 мА, соединительные провода и две клеммы для подсоединения измеряемого сопротивления. Нарисуйте, какие возможные схемы из этих элементов могут собрать Вова и Дима, и объясните, как в этих схемах показания миллиамперметра можно перевести в величину измеряемого сопротивления R_x .

Подсказка

Резистор R и измеряемое сопротивление R_x можно включить последовательно или параллельно друг другу; амперметр ставят так, чтобы через него шёл ток нужной ветви. Учтите предел шкалы 20 мА.

Ответ

Возможны три принципиально разные схемы сборки омметра (см. рисунки):

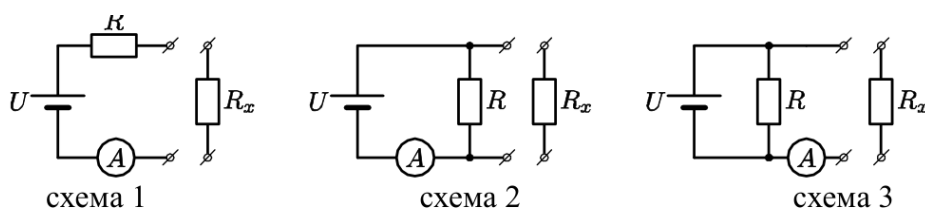


Схема 1: $R_x = U/I - R$, диапазон измерений от 0 до ∞ Ом. Схема 2: $R_x = \frac{UR}{IR - U}$, диапазон измерений от 150 Ом до ∞ Ом. Схема 3: $R_x = U/I$, диапазон измерений от 75 Ом до ∞ Ом.