

МОШ, 2010/11, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Шарик и клин равной массы

На гладкой горизонтальной поверхности находится жесткий клин массой M , причем его гладкая наклонная поверхность составляет угол α с горизонтом. На этот клин налетает жесткий шарик той же массы M , у которого за мгновение до столкновения с наклонной поверхностью клина скорость была горизонтальной. Происходит абсолютно упругий удар. Какой угол β с горизонтом составит скорость шарика сразу после удара?

Подсказка

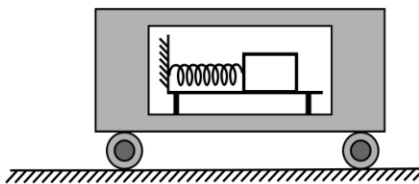
Поверхность гладкая: вдоль наклонной плоскости клина импульс шарика не меняется. Сохраняются также энергия и горизонтальная проекция импульса системы.

Ответ

$$\operatorname{tg} \beta = 2 \operatorname{tg} \alpha.$$

2 Грузик в тормозящем вагоне

Поезд, подходящий к станции, движется равнозамедленно с ускорением $a = 0,2 \text{ м/с}^2$, вплоть до момента остановки. На абсолютно гладком горизонтальном столе внутри вагона поезда находится грузик, соединённый пружиной с неподвижной опорой (см. рис.). Пока поезд движется, грузик неподвижен относительно вагона. В момент, когда поезд останавливается, грузик приходит в движение и начинает колебаться с периодом $T = 1 \text{ с}$. Найдите амплитуду колебаний грузика.



Подсказка

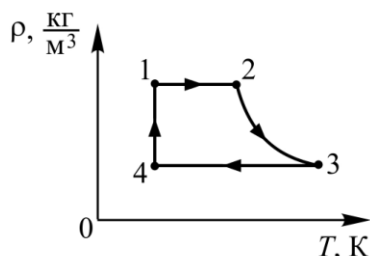
Пока поезд тормозит, пружина деформирована так, что её сила сообщает грузику ускорение a . После остановки эта деформация и есть начальное смещение от положения равновесия.

Ответ

$$x_m = \frac{aT^2}{4\pi^2} \approx 5 \text{ мм}.$$

3 Цикл в координатах ρ - T

С одним моле одноатомного идеального газа совершают циклический процесс 1-2-3-4-1, как показано на рисунке в координатах ρ - T (плотность-температура). Участок 2-3 — гипербола. Температуры в точках 1, 2 и 3 равны, соответственно, $T_1 = 300$ К, $T_2 = 500$ К, $T_3 = 800$ К. На участке 4-1 газ отдает холодильнику количество теплоты $Q_{41} \approx 1172$ Дж. Найти КПД цикла.



Подсказка

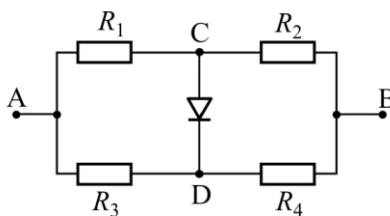
Выясните, какой процесс изображают участки цикла: что означает постоянство ρ и что — гипербола $\rho T = \text{const}$? Определите, на каких участках газ получает тепло.

Ответ

$$\eta = 1 - \frac{\frac{3}{2}R(T_3 - T_1) + Q_{41}}{\frac{3}{2}R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}R(T_3 - T_2)} \approx 0,15.$$

4 Диод в цепи переменного тока

Участок АВ электрической цепи состоит из резисторов с сопротивлениями $R_1 = R_0$, $R_2 = 9R_0$, $R_3 = 9R_0$, $R_4 = R_0$, где $R_0 = 1$ кОм, и идеального диода CD (см. рис.). Идеальный диод пропускает ток без сопротивления в направлении от С к D и не пропускает совсем в обратном направлении. Участок АВ подключают к источнику переменного синусоидального напряжения $U_{AB}(t) = U_m \sin \omega t$, амплитуда которого равна $U_m = 300$ В. Какая тепловая мощность будет выделяться на этом участке?



Подсказка

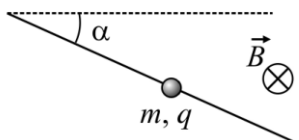
Определите, при каком знаке U_{AB} потенциал точки С выше потенциала D, и найдите сопротивление участка в каждом из полупериодов. Затем усредните мощность за период.

Ответ

$$P = \frac{17 U_m^2}{90 R_0} = 17 \text{ Вт.}$$

5 Заряженная бусинка на наклонном стержне

Бусинка, нанизанная на неподвижный стержень, образующий угол α с горизонтом (см. рис.), имеет массу m и заряд q . Бусинка может скользить вдоль стержня с коэффициентом трения μ и начинает движение из состояния покоя, причем $\mu < \tan \alpha$. Система находится в однородном магнитном поле с индукцией B , линии которого горизонтальны (перпендикулярны плоскости рисунка и направлены внутрь рисунка). Какую максимальную скорость и какое максимальное ускорение будет иметь бусинка при движении? Стержень не проводит ток. Рассмотреть два случая: $q > 0$ и $q < 0$.



Подсказка

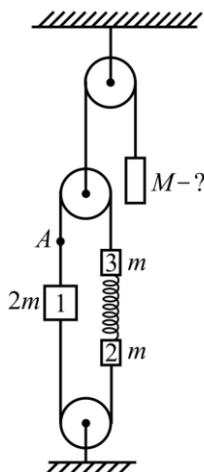
Сила Лоренца перпендикулярна стержню, поэтому меняет силу нормальной реакции, а с ней и силу трения. Максимальная скорость достигается, когда ускорение обращается в нуль.

Ответ

При $q > 0$: $v_{\max} = \frac{mg}{\mu q B}(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$, $a_{\max} = g \sin \alpha$; при $q < 0$: $v_{\max} = \frac{mg}{\mu |q| B}(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$, $a_{\max} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$.

6 Блоки, нити и пружина (11 класс)

В системе, изображенной на рисунке, все блоки — невесомые и вращаются без трения, все нити — невесомые и нерастяжимые (их жесткость велика по сравнению с жесткостью пружины). Пружина также невесома. Система находится в покое. При какой массе груза M груз 1 сразу после пережигания нити в точке A будет иметь ускорение большее по модулю, чем g ?



Подсказка

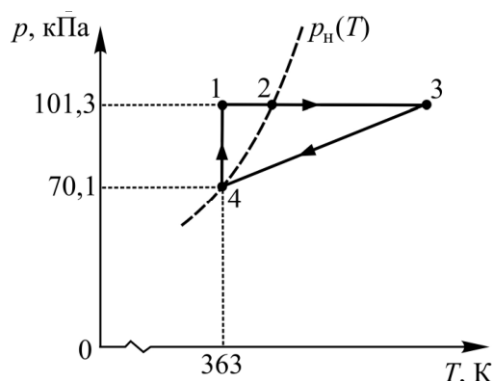
Сразу после пережигания сила упругости пружины не успевает измениться. Найдите её из равновесия груза 3 до пережигания и свяжите ускорения грузов 1 и 2 через нерастяжимость нитей.

Ответ

$$M > 6m.$$

7 Тепловая машина на воде и паре

Рабочим телом тепловой машины служит некоторое количество воды. Цикл, по которому работает машина, показан на рисунке в p – T координатах (пунктиром изображена зависимость давления насыщенных паров воды от температуры). Он состоит из изобарического (1–2–3), изохорического (3–4) и изотермического (4–1) участков. Найдите КПД этого цикла, считая воду практически несжимаемой жидкостью.



Напоминания: $p_1 = 101,3$ кПа — нормальное атмосферное давление, удельная теплота парообразования воды (при 100°C) $L \approx 2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль, удельная теплоемкость воды $c \approx 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31$ Дж/(моль·К), теплоемкость одного моля водяного пара при постоянном давлении равна $4R$.

Подсказка

Проследите, в каком состоянии (вода, смесь, пар) находится вещество на каждом участке. Температуру в точке 3 найдите из изохоры 3–4, а работу — по циклу на p – V диаграмме.

Ответ

$$\eta \approx 0,029 = 2,9\%.$$

8 Стержень, шарик и нить

Тонкий жесткий непроводящий стержень длиной L несет на себе электрический заряд Q , который равномерно распределен по длине стержня. Маленький шарик имеет электрический заряд q и прикреплен к одному из концов стержня тонкой непроводящей и незаряженной нитью длиной R . Какова сила натяжения нити, если система находится в равновесии? Считать, что $Q/q > 0$. Силу тяжести не учитывать.

Подсказка

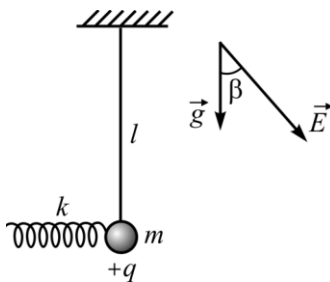
Разбейте стержень на малые элементы и просуммируйте (проинтегрируйте) силы их действия на шарик. Либо найдите работу силы при малом смещении шарика как убыль энергии взаимодействия.

Ответ

$$F(R) = k \frac{qQ}{R(R+L)} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R(R+L)}.$$

9 Малые колебания заряженного шарика

На тонкой непроводящей нити длиной l подвешен маленький шарик массой m , который заряжен зарядом $+q$. Слева к шарiku прикреплена непроводящая пружинка жесткостью k , расположенная горизонтально. Шарик находится в однородном электрическом поле $\vec{E}$, направленном так, как показано на рисунке. В состоянии равновесия нить с шариком висит вертикально. Найти период малых колебаний шарика в плоскости рисунка.



Подсказка

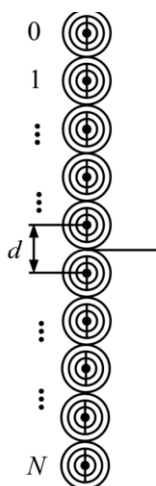
При малом отклонении на угол φ горизонтальная составляющая силы электрического поля даёт поправку второго порядка малости. Запишите уравнение движения по касательной к дуге.

Ответ

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{qE \cos \beta}{ml}}}.$$

10 СВЧ-антенна из излучателей

СВЧ-антенна радиолокатора устроена следующим образом: вдоль прямой линии на равных расстояниях $d = 2,5$ см друг от друга расположены $N = 100$ излучателей электромагнитных волн длиной $\lambda = 2d$ (см. рис.). Каждый из них излучает сферическую волну, причем модуль напряженности поля n -го излучателя ($0 \leq n \leq N$) изменяется по закону $E(t) = A \sin(\omega t - kr_n + n \frac{\pi}{2} \cos \Omega t)$, где r_n — расстояние от данного излучателя, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, а $\Omega \ll \omega$. Найдите, как зависит от времени угол между лучом, излучаемым радиолокатором в плоскости рисунка, и нормалью к цепочке излучателей. Оцените угловую ширину луча и его угловую скорость.



Подсказка

Волны соседних излучателей усиливают друг друга в направлении, где набег фазы от разности хода и добавка фазы $\frac{\pi}{2} \cos \Omega t$ в сумме кратны 2π . Найдите это направление как функцию времени.

Ответ

Цепочка излучателей — направленная антенна, испускающая узкий СВЧ-луч; угол φ его отклонения от нормали к цепочке меняется по закону $\sin \varphi = \frac{1}{2} \cos \Omega t$, причём $\varphi_{\max} = \arcsin \frac{1}{2} = 30^\circ$. При $\varphi = 0$ максимальная угловая скорость качания луча $\dot{\varphi}_{\max} = \frac{1}{2} \Omega$, а угловая ширина луча $\Delta\varphi_{\min} = \frac{2}{N} = 0,02$ радиана $\approx 1^\circ$.