

МОШ, 2010/11, заключительный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Камень с обрыва

Находясь на краю глубокого обрыва, турист бросает камень вертикально вверх. При последующем движении вниз камень проходит точку бросания и падает в обрыв. Известно, что за промежуток времени $t = 1$ с, отсчитываемый от момента броска, камень прошёл путь $S = 2,9$ м. Определите начальную скорость камня, сообщённую ему при броске. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Сопротивлением воздуха пренебречь.

Подсказка

Путь — не перемещение: сложите путь вверх до точки поворота и путь вниз за оставшееся время. Сначала проверьте, мог ли камень всё время лететь вверх.

Ответ

$$v_0 = g \left(\frac{t}{2} \pm \sqrt{\frac{S}{g} - \frac{t^2}{4}} \right), \text{ то есть } 3 \text{ м/с или } 7 \text{ м/с.}$$

2 Шайба на нити на наклонной плоскости

На наклонной плоской поверхности, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, находится небольшая плоская шайба массой $m = 0,5$ кг, прикреплённая лёгкой нитью длиной $L = 1$ м к точке на этой поверхности. Шайбу толкнули вдоль поверхности так, что нить натянута и скорость шайбы перпендикулярна нити. В некоторый момент шайба имеет направленную горизонтально скорость $V = 2$ м/с. Коэффициент трения шайбы о плоскость равен $\mu = 0,6$. Каково по модулю ускорение a шайбы в этот момент времени? Какова сила натяжения F нити в этот момент? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Подсказка

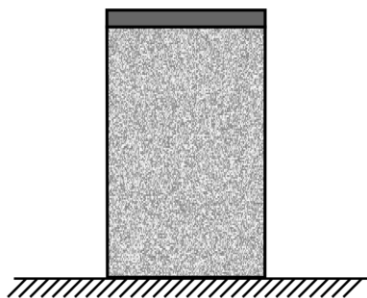
Разложите ускорение на нормальную (вдоль нити) и касательную (вдоль скорости) составляющие. Касательную создаёт только сила трения, нормальную — нить и составляющая силы тяжести вдоль плоскости.

Ответ

$$a = \sqrt{(V^2/L)^2 + (\mu g \cos \alpha)^2} = 5 \text{ м/с}^2; \quad F = mV^2/L + mg \sin \alpha \approx 6,33 \text{ Н.}$$

3 Крышка на смеси воды и льда

В цилиндрическом сосуде высотой $h = 20$ см находится смесь воды и мелких кусочков льда (см. рис.). На поверхности плавает круглая стальная крышка толщиной $d = 2$ мм, нижний край которой находится точно на поверхности воды. Найдите среднюю плотность смеси воды и льда. Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность льда $\rho_l = 900$ кг/м³, плотность стали $\rho_c = 7800$ кг/м³. Трением льда о стенки сосуда пренебречь.



Подсказка

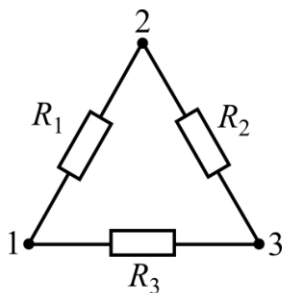
Льдинки плавают, поэтому давление на дне сосуда определяется весом всего содержимого. Сравните его с давлением, которое создала бы вода высотой h при действии на неё крышки.

Ответ

$$\rho = \rho_{\text{в}} - \rho_{\text{с}} \frac{d}{h} = 922 \text{ кг/м}^3.$$

4 Резисторы «треугольником»

Схема, состоящая из 3-х резисторов и 3-х клемм, соединенных по схеме «треугольник» (см. рис.), исследуется следующим образом: две из клемм замыкаются между собой, и измеряется сопротивление между двумя замкнутыми клеммами и третьей (свободной). В результате измерений получились сопротивления R_a , R_b , R_c . Найти номиналы резисторов R_1 , R_2 , R_3 , из которых состоит схема.



Подсказка

Замкнув две клеммы, вы получаете параллельное соединение двух резисторов, подключённое последовательно к третьему. Запишите три такие формулы и решите систему.

Ответ

$$R_1 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_b + R_a R_c - R_b R_c}, \quad R_2 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_b + R_b R_c - R_a R_c}, \quad R_3 = \frac{2R_a R_b R_c}{R_a R_c + R_b R_c - R_a R_b}.$$

5 Перелёт Ту-160

Самолёт ТУ–160 в безветренную на всей Земле погоду стартовал с аэродрома в Санкт-Петербурге. В течение всего времени 27-ми часового полета самолёт находился на одной и той же высоте и держал одну и ту же по величине скорость 1000 км/час, сделав несколько дозаправок в воздухе. Сначала он 6 часов летел на юг, затем 10 часов на восток, потом 6 часов на север, и в последние 5 часов полета его скорость была направлена на запад. Сколько еще времени потребуется самолёту, чтобы с такой же по величине скоростью долететь до родного аэродрома по кратчайшему пути? Санкт-Петербург находится на широте 60° , а радиус Земли равен примерно 6400 км.

Подсказка

Полёт на юг и обратно на север возвращает самолёт на исходную широту. Найдите широту, на которой он летел на восток, и учтите, что радиус окружности параллели равен $R \cos \theta$.

Ответ

Самолёту потребуется ещё примерно 109,2 с.

6 Потоп и пирамида Хеопса

После завершения строительства пирамиды Хеопса все её ребра, согласно легенде, имели одинаковую длину $A \approx 230$ м. В основании пирамиды — квадрат со стороной A . По преданиям, во время «Великого потопа» уровень воды совпал с вершиной пирамиды. С какой силой давила вода на северную боковую грань пирамиды? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Замечание: объем V пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}SH$, где S — площадь основания пирамиды.

Подсказка

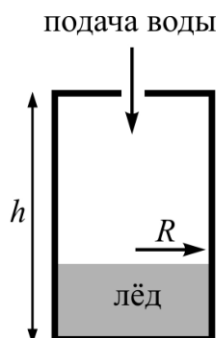
Сила давления на грань равна $\rho g h_c S_{гр}$, где h_c — глубина центра грани. Либо найдите вертикальную равнодействующую сил на все четыре грани через вес воды над пирамидой.

Ответ

$$F = \frac{\rho g A^3}{2\sqrt{6}} \approx 2,48 \cdot 10^{10} \text{ Н.}$$

7 Лёд в калориметре

Цилиндрический калориметр радиусом $R = 10$ см и высотой $h = 30$ см заполнен льдом при температуре $t_0 = -10^\circ\text{C}$ на одну треть своего объёма (см. рис.). В калориметр через отверстие сверху медленно наливают воду, имеющую температуру $t = 30^\circ\text{C}$. Какой максимальный объём воды можно налить в калориметр? Удельная теплоёмкость воды $c_v = 4200$ Дж/(кг·°C), удельная теплоёмкость льда $c_l = 2100$ Дж/(кг·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг. Плотность воды $\rho_v = 1000$ кг/м³, плотность льда $\rho_l = 900$ кг/м³. Теплоёмкостью калориметра и потерями теплоты пренебречь.



Подсказка

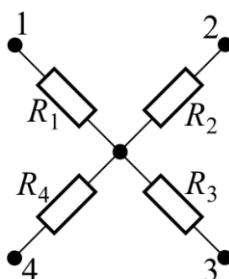
Составьте уравнение теплового баланса: часть льда нагревается до нуля и тает, налитая вода остывает до нуля. Второе уравнение — на полный объём: вода и оставшийся лёд занимают весь калориметр.

Ответ

$$V = \frac{\pi R^2 h \rho_{\text{л}} (2\lambda \rho_{\text{в}} + c_{\text{л}} t_0 (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}))}{3\rho_{\text{в}} (\lambda \rho_{\text{л}} - c_{\text{в}} t (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}))} \approx 6,58 \text{ л.}$$

8 Четыре резистора со звезды

Схема состоит из 4-х клемм и 4-х различных резисторов, которые имеют один общий вывод, а другим выводом соединены с соответствующей клеммой. Известны сопротивления между клеммами 1–2, 2–3 и 3–4: они равны R_{12} , R_{23} и R_{34} . Сопротивление между какими клеммами еще необходимо измерить, чтобы найти номиналы всех резисторов R_1 , R_2 , R_3 и R_4 ? Чему они будут равны?



Подсказка

Между любыми двумя клеммами сопротивление равно сумме двух соответствующих резисторов: $R_{ij} = R_i + R_j$. Трёх данных уравнений мало для четырёх неизвестных — нужно ещё одно, замыкающее цепочку.

Ответ

1) Если измерить R_{13} : $R_1 = (R_{12} + R_{13} - R_{23})/2$; $R_2 = (R_{13} + R_{23} - R_{12})/2$; $R_3 = (R_{12} + R_{23} - R_{13})/2$;
 $R_4 = R_{34} - R_3 = (2R_{34} - R_{13} + R_{12} - R_{23})/2$.

2) Если измерить R_{24} : $R_2 = (R_{24} + R_{23} - R_{34})/2$; $R_3 = (R_{23} + R_{34} - R_{24})/2$; $R_4 = (R_{24} + R_{34} - R_{23})/2$;
 $R_1 = R_{12} - R_2 = (2R_{12} + R_{34} - R_{24} - R_{23})/2$.