

МОШ, 2011/12, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Гирьки и дятел

На легкой короткой нити к ветке сосны подвешена гирька массой $m = 1$ кг. К ней привязана другая легкая нить с длиной в недеформированном состоянии $L = 1$ м и жесткостью $k = 1$ кН/м, на конце которой висит еще одна гирька массой $m = 1$ кг. Система находилась в равновесии до момента, когда верхнюю нить перебил дятел. Гирьки упали на землю одновременно. Каково расстояние H от ветки до земли? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Подсказка

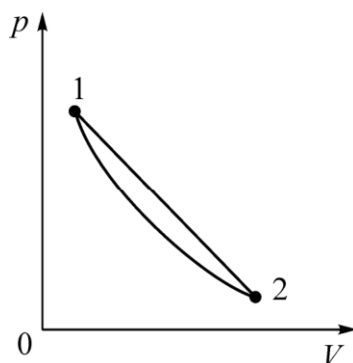
Пока нижняя нить растянута, она мешает гирькам падать свободно. Выясните, как нить сжимается, и оцените, как это сказывается на времени падения.

Ответ

$$H \approx \frac{kL^2}{4mg} + \frac{L}{2} = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{kL}{2mg} \right) = 25,5 \text{ м.}$$

2 Цикл с изотермой

Рабочим телом теплового двигателя является $\nu = 1$ моль гелия. Цикл работы тепловой машины состоит из линейного в pV -координатах участка 1–2 и изотермы 2–1. Максимальный объем гелия в цикле в 7 раз больше минимального. Минимальная температура гелия в цикле составляет $T_0 = 280$ К. Какое количество теплоты было получено гелием в данном цикле от нагревателя? Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).



Подсказка

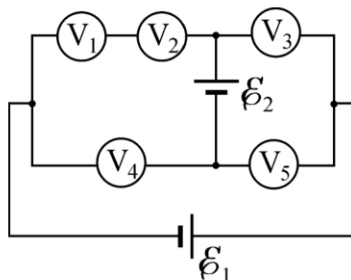
На прямой 1–2 тепло гелий получает не везде: найдите точку, где приращение теплоты ΔQ меняет знак, и считайте Q только до неё.

Ответ

$$Q_+ = 32\nu RT_0/7 \approx 10,6 \text{ кДж}.$$

3 Пять вольтметров

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из двух батареек с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ В}$ и $\mathcal{E}_2 = 2 \text{ В}$ и пяти одинаковых вольтметров. Найдите показания каждого из вольтметров. Сопротивления батареек много меньше сопротивлений вольтметров.



Подсказка

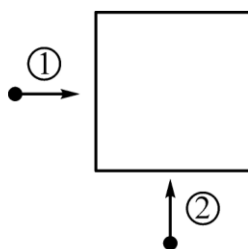
Вольтметр — это резистор одинакового сопротивления R_V : показания пропорциональны токам. Запишите правила Кирхгофа для токов через вольтметры.

Ответ

$$U_1 = U_2 = 2(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/7 = 2 \text{ В}; \quad U_3 = (3\mathcal{E}_1 - 4\mathcal{E}_2)/7 = 1 \text{ В}; \quad U_4 = (4\mathcal{E}_1 - 3\mathcal{E}_2)/7 = 2 \text{ В}; \quad U_5 = 3(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/7 = 3 \text{ В}.$$

4 Электрон в скрещенных полях

В некоторой области пространства созданы однородное электрическое и магнитное поля. Когда электрон влетает в эту область со скоростью v в направлении, показанном стрелкой 1, он движется в этой области прямолинейно и равномерно. Когда электрон с такой же по модулю скоростью влетает в электромагнитное поле вдоль стрелки 2, перпендикулярной направлению 1, он тоже движется в поле прямолинейно и равномерно. Определите направления векторов напряженности электрического поля $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$. Найдите отношение модулей E/B .



Подсказка

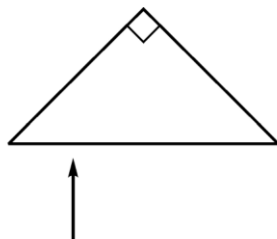
Равномерное движение означает равенство нулю суммы электрической и магнитной сил в обоих случаях. Вычтите два условия и подумайте, куда должны быть направлены $\vec{E}$ и $\vec{B}$.

Ответ

Вектор $\vec{E}$ направлен перпендикулярно плоскости рисунка («на нас» либо «от нас»); вектор $\vec{B}$ направлен в плоскости рисунка под углом 45° к скорости первого электрона и 135° к скорости второго электрона (либо наоборот); $E/B = v/\sqrt{2}$.

5 Призма и лазер

На призму, сечение которой имеет вид равнобедренного прямоугольного треугольника, перпендикулярно нижней грани падает луч от лазерной указки. Каким должен быть показатель преломления n материала, из которого сделана призма, чтобы свет от указки вышел из призмы наружу только через эту же грань?



Подсказка

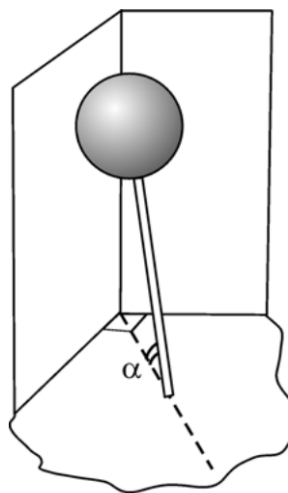
Проследите ход луча: на какие грани он падает и под какими углами? На каждой наклонной грани нужно полное внутреннее отражение.

Ответ

$$n > \sqrt{2} \approx 1,41.$$

6 Чупа-чупс в углу

«Чупа-чупс стоял в углу...» За что его поставили, неясно, но стоять ему не очень-то хотелось. Вот он и стал постепенно отставлять свою «ножку» все дальше вдоль биссектрисы того прямого угла между стенками, в который его поставили, а «головой» опираясь о стенки (см. рисунок). При каком угле α между ножкой и полом чупа-чупс упадет? Считать, что вся его масса сосредоточена в однородной шарообразной «голове» радиусом R , расстояние от центра головы до конца ножки равно l , коэффициент трения головы о стенки угла — μ_1 , а ножки об пол — μ_2 . Решите задачу в общем виде, а затем проведите численный расчет угла α для случая $\mu_1 = \mu_2 = 0,6$, $l = 4R$.



Подсказка

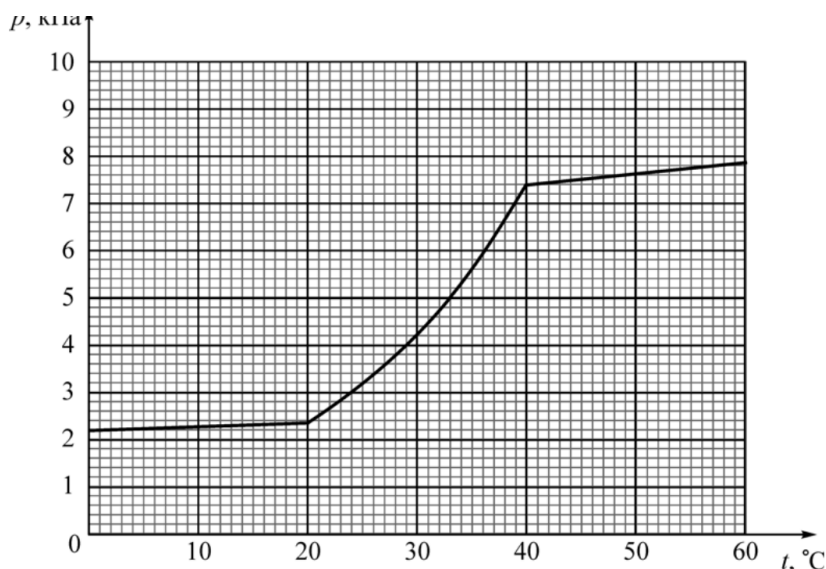
Из симметрии силы реакции и трения от двух стенок равны, поэтому их можно заменить суммарными. Запишите условия равенства нулю суммы горизонтальных проекций сил и суммы моментов, при падении силы трения достигают предельных значений.

Ответ

$$\alpha = \arccos \left(\frac{R}{l} \cdot \frac{\mu_1 \mu_2}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \right) - \arccos \frac{1}{\sqrt{1 + \mu_2^2}} \approx 54,6^\circ.$$

7 Вода и азот под поршнем

Сосуд объемом $V = 1 \text{ м}^3$ разделен на две части легким тонким подвижным теплопроводящим поршнем, по одну сторону от которого находится вода, по другую — азот. График зависимости давления в системе от температуры приведен на рисунке. Сколько молей воды и сколько молей азота находятся в сосуде? Трения нет, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.



Подсказка

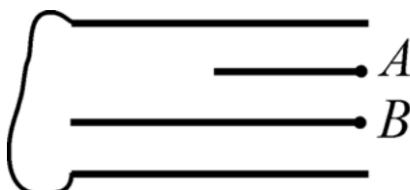
Три участка графика: вода только жидкая, вода с насыщенным паром, вода только пар. На первом и третьем давление создаётся газами, подчиняющимися закону Менделеева–Клапейрона, а угловые коэффициенты связаны с числом молей.

Ответ

$\nu_{\text{азота}} \approx 0,97 \pm 0,01 \text{ моль}$, $\nu_{\text{воды}} \approx 1,87 \pm 0,02 \text{ моль}$.

8 Четыре пластины конденсатора

Электрическая емкость плоского конденсатора, состоящего из двух одинаковых параллельных друг другу пластин, находящихся на расстоянии d , равна C . Четыре такие пластины расположили параллельно друг другу на расстоянии d , соединив две внешние пластины тонким проводом. От одной из внутренних пластин отрезали и удалили половину. Какова емкость такой системы проводников, если ее измеряют между указанными на рисунке точками A и B ?



Подсказка

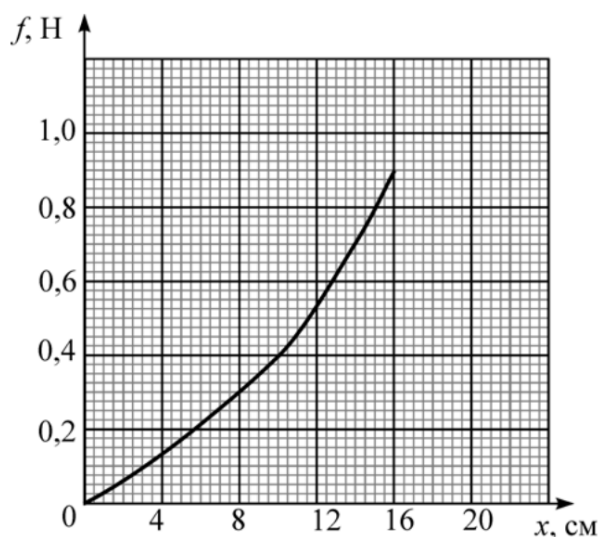
Каждую пластину можно мысленно «раздвинуть» на две поверхности, а верхнюю пластину — разделить на две половины: получится схема из обычных конденсаторов.

Ответ

$$C_{\Sigma} = 6C/7.$$

9 Жгут и пружина

Резиновый жгут и пружина в нерастянутом состоянии имеют одинаковые длины. Коэффициент жесткости пружины равен $k = 4 \text{ Н/м}$. График зависимости модуля f силы растяжения жгута от его удлинения x приведен на рисунке. Пружина и жгут очень легкие. Пружину подвешивают за один из концов к потолку, а к ее второму концу прикрепляют конец жгута (при этом пружина и жгут оказываются соединенными последовательно).



1. К свободному нижнему концу жгута прикладывают направленную вниз силу с модулем $F = 0,7 \text{ Н}$. На какую суммарную величину X растянутся пружина и жгут?
2. Найдите массу m груза, который нужно подвесить к свободному нижнему концу жгута, чтобы суммарное удлинение системы в положении равновесия было равно $L = 20 \text{ см}$.
3. Оцените энергию E , которая будет запасена в жгуте при подвешивании к его свободному нижнему концу покоящегося груза найденной выше массой m .
4. Груз этой массой m , подвешенный к свободному нижнему концу жгута, заставили свободно колебаться с амплитудой $A = 2 \text{ мм}$ вокруг положения равновесия. Пренебрегая трением, оцените, чему будет равен период таких колебаний груза.

При решении задачи считайте, что ускорение свободного падения равно $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Подсказка

Сила в жгуте и пружине одна и та же, а удлинения складываются. Для груза решайте уравнение $f(x) = kL - kx$ графически; энергия — площадь под графиком; для малых колебаний возьмите жёсткость жгута как наклон касательной.

Ответ

1) $X = 31,5$ см; 2) $m = 40$ г; 3) $E \approx 18 \pm 2$ мДж; 4) $T \approx 0,84 \pm 0,05$ с.

10 Солнечный зайчик

Летом в ясный солнечный день школьник вышел во двор своего дома с прямоугольным зеркальцем в руках. Поймав зеркальцем солнечный свет, он направил зайчик перпендикулярно на неосвещенную стену дома и стал постепенно отходить от нее. Оказалось, что вначале зайчик имел квадратную форму со стороной $d = 5$ см, а потом его края стали размываться, и он постепенно стал практически круглым, с небольшим размытием по краям. Пренебрегая явлением дифракции, объясните наблюдаемый эффект и оцените, при каком расстоянии L от стены ширина размытой области на краю зайчика станет менее 10% от диаметра его ярко освещенной круглой части. Размер зеркальца 5×7 см, угловой размер Солнца $\varphi \approx 0,01$ радиана.

Подсказка

От каждой точки зеркальца идёт расходящийся конус лучей с углом φ . Выразите через L и φ ширину размытия края и сравните её с размером зеркальца.

Ответ

$$L > \frac{d}{0,1 \varphi} \approx 50 \text{ м.}$$