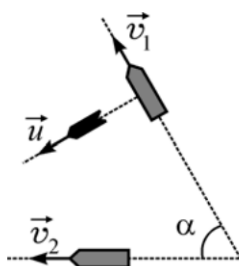


МОШ, 2012/13, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Лайнеры и катера

Круизные лайнеры «Первый» и «Второй» плывут равномерно и прямолинейно. Угол между их курсами равен $\alpha = 60^\circ$, скорость «Первого» $v_1 = 35$ км/ч, скорость «Второго» $v_2 = 31,6$ км/ч. С лайнера «Первый» с временным интервалом в несколько часов отплывают два катера, которые, двигаясь с постоянной одинаковой скоростью, перпендикулярной курсу «Первого», точно приплывают ко «Второму». Определите скорость u катера.



Ответ

$$u = \frac{v_1 v_2 \sin \alpha}{v_1 - v_2 \cos \alpha} \approx 50 \text{ км/ч.}$$

2 Гантель на гладкой поверхности

Гантель, состоящая из двух шариков массами m и $2m$ и лёгкого стержня длиной L , поставлена вертикально на гладкую горизонтальную поверхность более массивным шариком вниз. После небольшого толчка нижний шарик гантели начинает двигаться по горизонтальной поверхности, а верхний — двигаться в пространстве. Найдите модули скоростей V_1 и V_2 шариков в зависимости от синуса угла наклона β гантели к горизонту. Ускорение свободного падения равно g .

Ответ

Модуль скорости шарика массой m равен $V_1 = \sqrt{\frac{2gL(1 - \sin \beta)(9 - 5 \sin^2 \beta)}{9 - 3 \sin^2 \beta}}$, модуль скорости шарика массой $2m$ равен $V_2 = \sin \beta \sqrt{\frac{2gL(1 - \sin \beta)}{9 - 3 \sin^2 \beta}}$.

3 КПД цикла из изотерм и изохор

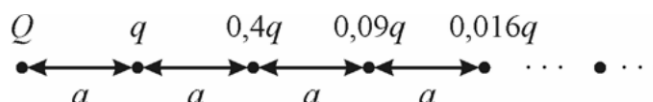
Идеальный газ сначала изотермически расширяют, затем охлаждают при постоянном объёме, пока его температура (в кельвинах) не уменьшится в два раза, после чего газ изотермически сжимают до первоначального объёма и, наконец, завершая циклический процесс, изохорно возвращают в исходное состояние, сообщая такое же количество теплоты, что и при изотермическом расширении. Определите КПД этого цикла.

Ответ

$$\eta = \frac{1}{4}.$$

4 Сила на заряд в бесконечной системе

Найдите модуль электростатической силы, действующей на точечный заряд Q в бесконечной системе точечных зарядов, изображённой на рисунке. Все заряды закреплены в вакууме на одной прямой, имеют одинаковый знак, расстояния между соседними зарядами одинаковы и равны a .



Ответ

На заряд Q действует сила с модулем $F = \frac{5}{18\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{a^2}$.

5 Разряд конденсатора на две катушки

Заряженный конденсатор ёмкостью C , электростатическая энергия которого равна W , начинает разряжаться через две соединённые параллельно катушки индуктивностями L и $2L$. Какой будет максимальная энергия катушки индуктивностью L в процессе возникающих колебаний? Сопротивлением электрической цепи пренебречь.

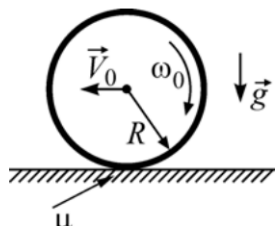
Ответ

Максимальная энергия катушки индуктивностью L в процессе возникающих колебаний равна $2W/3$.

6 Хула-хуп с проскальзыванием

«Игра с хула-хупом». «Хула-хуп» — это обруч, который девушки крутят на талии, а спортсменки проделывают с ним и другие «фокусы». Например, закручивают его в вертикальной плоскости и толкают от себя по горизонтали, после чего вращающийся обруч, проскальзывая по полу, отъезжает от них на некоторое расстояние и возвращается обратно.

Сформулируем задачу так: обруч радиусом R в момент толчка (см. рисунок) закручен вокруг горизонтальной оси до угловой скорости ω_0 , и ему придали скорость $\vec{V}_0$, направленную вдоль пола перпендикулярно оси вращения. Коэффициент трения обруча об пол равен μ .



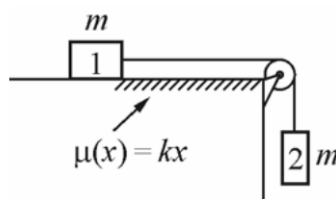
1. На какое максимальное расстояние в направлении скорости $\vec{V}_0$ обруч удалится от начальной точки?
2. Какова будет его угловая скорость в момент остановки?
3. С какой скоростью он будет катиться после окончания проскальзывания по полу?
4. Как связаны V_0 и ω_0 , если проскальзывание прекращается в момент возврата в исходную точку?

Ответ

1) $S_{\max} = \frac{V_0^2}{2\mu g}$; 2) $\omega_1 = \omega_0 - V_0/R$, при этом должно быть $V_0 < \omega_0 R$; 3) $V_k = \frac{\omega_0 R - V_0}{2} > 0$, так как $V_0 < \omega_0 R$; 4) $V_0 = \frac{\omega_0 R}{3}$.

7 Груз с трением, зависящим от координаты

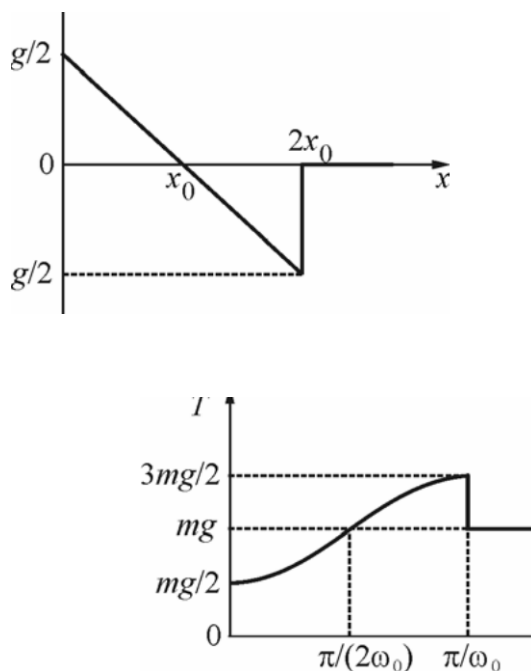
На длинном горизонтальном столе лежит груз 1 массой m , к которому привязана лёгкая нерастяжимая нить. Эта нить перекинута через установленный на краю стола невесомый блок, который может вращаться без трения, и ко второму концу нити прикреплён такой же груз 2. Сначала груз 1 удерживают неподвижно, так, что груз 2 свободно висит на нити, а затем груз 1 отпускают без начальной скорости. При движении системы на груз 1 действует сила сухого трения, причём коэффициент трения скольжения зависит от координаты x груза 1 по закону $\mu(x) = kx$ (координата x отсчитывается от начального положения груза 1).



1. Какой путь пройдёт груз 1 после отпускания?
2. Какую максимальную скорость будут иметь грузы в процессе движения этой системы?
3. Найдите максимальное значение модуля силы натяжения нити в процессе движения этой системы.
4. Изобразите график зависимости проекции ускорения груза 1 на направление его движения от координаты x и график зависимости модуля силы натяжения нити от времени.

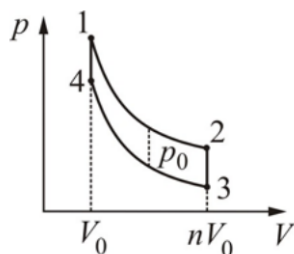
Ответ

1) груз 1 после отпускания пройдёт путь $x_{\max} = 2x_0 = 2/k$; 2) в процессе движения грузы будут иметь максимальную скорость $V_{\max} = \sqrt{\frac{g}{2k}}$; 3) максимальное значение модуля силы натяжения нити в процессе движения $T_{\max} = \frac{3mg}{2}$; 4) графики зависимостей $a(x)$ и $T(t)$ приведены на рисунках 1 и 2.



8 Цикл с адиабатой и изохорами

Над идеальным одноатомным газом совершают циклический процесс 1–2–3–4–1, график которого изображён на pV -диаграмме. Минимальный объём газа равен V_0 , а максимальный — в n раз больше. Участки 2–3 и 4–1 — изохоры, участок 3–4 — адиабата, а участок 1–2 получен из участка 3–4 сдвигом на отрезок длиной p_0 вверх вдоль оси давления. Определите количества теплоты, полученные или отданные на участках 1–2, 2–3, 4–1, а также КПД этого цикла.

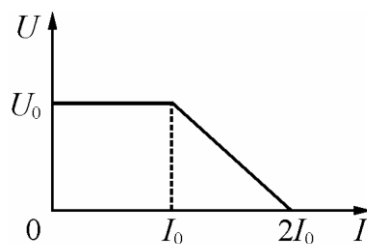


Ответ

$$Q_{41} = 1,5 p_0 V_0; \quad Q_{23} = -1,5 n p_0 V_0; \quad Q_{12} = 2,5 p_0 (n - 1) V_0; \quad \text{КПД } \eta = 1 - \frac{1,5 n}{2,5(n - 1) + 1,5}.$$

9 Источник с защитой и конденсатор

На рисунке показана вольтамперная характеристика источника напряжения. Если сила тока в подключённой к источнику цепи меньше $I_0 = 1$ А, то напряжение на клеммах источника равно $U_0 = 10$ В. Если же сила тока в цепи превышает величину I_0 , то в источнике срабатывает защита от перегрузки, и напряжение U на его клеммах начинает убывать с ростом силы тока I по линейному закону, пока при силе тока $2I_0$ (ток короткого замыкания) напряжение U не обращается в ноль.



К клеммам этого источника подключили цепь, состоящую из последовательно соединённых резистора сопротивлением $R_0 = 15$ Ом и незаряженного конденсатора. К моменту, когда конденсатор полностью зарядился, в резисторе выделилось количество теплоты $Q_0 = 12$ мкДж. Затем цепь отсоединили от источника, разрядили конденсатор, заменили резистор на другой с сопротивлением $R_1 = 5$ Ом, и вновь подключили цепь к клеммам источника.

1. Чему равна максимальная сила тока, протекающего в цепях с резисторами R_0 и R_1 ?
2. Чему равна ёмкость включённого в цепь конденсатора?
3. Какое количество теплоты выделится в резисторе R_1 к моменту полной зарядки конденсатора?

Ответ

1) максимальная сила тока, протекающего в цепях с резисторами R_0 и R_1 , равна $I_{\max}^{(0)} = \frac{U_0}{R_0} = \frac{2}{3}$ А и $I_{\max}^{(1)} = \frac{2I_0U_0}{I_0R_1 + U_0} = \frac{4}{3}$ А соответственно;

2) ёмкость включённого в цепь конденсатора равна $C = \frac{2Q_0}{U_0^2} = 0,24$ мкФ;

3) в резисторе R_1 к моменту полной зарядки конденсатора выделится количество теплоты $Q_1 = \frac{I_0R_1(3U_0 - I_0R_1)}{U_0(U_0 + I_0R_1)} Q_0 = \frac{5}{6} Q_0 = 10$ мкДж.

10 Муравей в кривом зеркале

Глаз наблюдателя расположен так, что муравей и его изображение в «кривом» (сферическом) зеркале для наблюдателя имеют одинаковые угловые размеры и полностью «накладываются» друг на друга. Наблюдатель отодвинулся от зеркала на расстояние L вдоль линии, на которой находятся муравей и его изображение, и теперь видит, что угловой размер муравья составляет 75% от углового размера его изображения. Затем наблюдатель отодвинулся в том же направлении ещё на L , и угловой размер изображения стал в 1,5 раза больше углового размера муравья. Во сколько раз изображение муравья больше его самого? Каков радиус кривизны зеркала?

Ответ

Изображение муравья больше его самого в два раза, радиус кривизны зеркала $R = 4L/3$.