

МОШ, 2013/14, отборочный этап, 7-11 класс

Условия, ответы и решения

1 Плот и катер на реке

На берегу реки на расстоянии 10 км друг от друга расположены деревни Липовка и Демушкино. В 12.00 от Липовки к Демушкино стартовали плот и катер. Доплыв до Демушкино, катер развернулся и повернул обратно, встретившись с плотом в 14.00. Плот при этом проплыл 4 км. Постройте графики движения (зависимость расстояния до Липовки от времени) для плота и катера. В какой момент времени катер прибыл в Демушкино? Найдите скорость течения реки и скорость катера в стоячей воде, считая эти скорости постоянными.

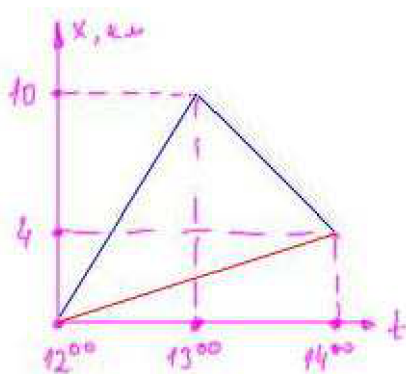
Вопрос о построении графиков в варианте для 7 класса не задавался.

Подсказка

Плот движется со скоростью течения. Обозначьте времена движения катера «туда» и «обратно» и сравните расстояние, пройденное катером по течению, с суммой пути плота и пути катера назад.

Ответ

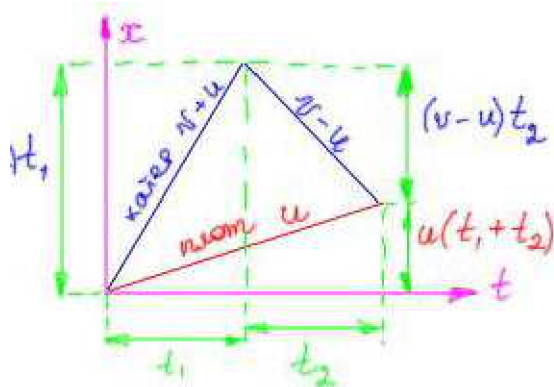
Катер прибыл в Демушкино в 13.00; скорость катера в стоячей воде 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Графики движения катера и плота приведены на рисунке.



Решение

Учитывая, что плот и катер отплыли в одном направлении, изобразим графики движения плота и катера (зависимость расстояния x до Липовки от времени t).

Почти все данные для построения данного графика приведены в условии задачи. Неясно только, в какой момент времени катер прибыл в Демушкино. Для ответа на этот вопрос введём обозначения: t_1 — время путешествия катера из Липовки в Демушкино, t_2 — время путешествия от Демушкино до встречи с плотом; u — скорость течения реки (это скорость плота), v — скорость катера в стоячей воде. Тогда скорость катера по течению будет равна $v + u$, а против течения $v - u$.



Обозначая расстояния на графике, составим уравнение:

$$(v + u)t_1 = u(t_1 + t_2) + (v - u)t_2,$$

из него найдём, что $t_1 = t_2$. Следовательно, катер прибыл в Демушкино в момент времени точно посередине между 12.00 и 14.00, то есть в 13.00.

Теперь данных вполне достаточно для построения графиков движения (см. ответ). Из графиков найдём скорость плота, равную скорости течения реки ($4 \text{ км} : 2 \text{ ч} = 2 \text{ км/ч}$), скорости катера по течению ($10 \text{ км} : 1 \text{ ч} = 10 \text{ км/ч}$) и против течения ($6 \text{ км} : 1 \text{ ч} = 6 \text{ км/ч}$). Следовательно, скорость катера в стоячей воде составляет 8 км/ч .

Примечание. Свойство $t_1 = t_2$ также можно установить, перейдя в систему отсчёта, связанную с плотом. В этой системе отсчёта катер сначала отплывает от плота на некоторое расстояние, а затем с той же по величине скоростью приплывает к плоту. Время плавания «туда» равно при этом времени плавания «обратно».

2 Заряженная и нейтральная частицы

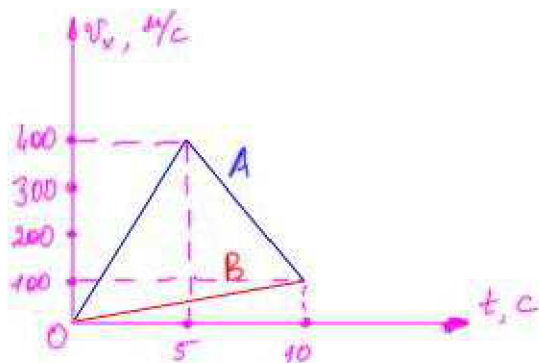
Заряженная частица А и нейтральная частица В движутся в вакууме в области, где имеются как поле тяжести (ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$), так и электрическое поле, направленное параллельно полю тяжести. Частицы стартуют из одной точки без начальной скорости. Достигнув скорости 400 м/с , частица А влетела в область пространства, где направление электрического поля изменилось на противоположное, а его величина осталась неизменной. Спустя 10 секунд с момента старта расстояние между частицами достигло максимума и начало уменьшаться. Постройте графики зависимости скоростей частиц А и В от времени в первые 10 секунд после старта. В какой момент времени изменилось направление напряжённости электрического поля? Укажите этот момент на графике.

Подсказка

Расстояние между частицами перестает расти, когда их скорости сравниваются. Запишите изменения скорости частицы А на двух участках и приравняйте её конечную скорость к скорости частицы В.

Ответ

Графики зависимостей скоростей частиц от времени приведены на рисунке. Направление поля изменилось через 5 секунд после старта.



Решение

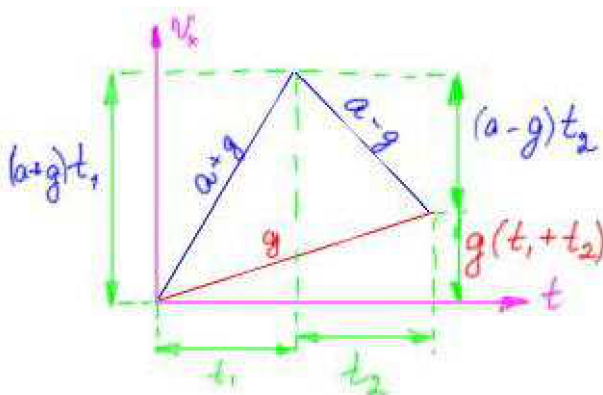
Направим ось x вдоль вектора ускорения свободного падения. Тогда нейтральная частица будет двигаться равноускоренно, а её проекция скорости на ось x будет линейно зависеть от времени: $v_x(t) = gt$. График зависимости v_x от t для этой частицы является прямой линией.

На заряженную частицу (масса m , заряд q) будут действовать силы тяжести mg и электрическая сила qE_x . Её ускорение будет определяться из второго закона Ньютона $ma_x = mg + qE_x$; оно равно $a_x = g + qE_x/m$.

Предполагая, что в начальный момент времени $qE_x > 0$, построим график зависимости v_x от t для данной частицы. Сначала частица движется с положительным ускорением $a_x = a + g$, где $a = qE/m$, затем — с отрицательным ускорением $a_x = -(a - g)$.

Отметим, что расстояние между частицами начинает уменьшаться, когда относительная скорость частиц обращается в нуль. Поэтому графики $v_x(t)$ для заряженной и нейтральной частиц приходят в одну точку.

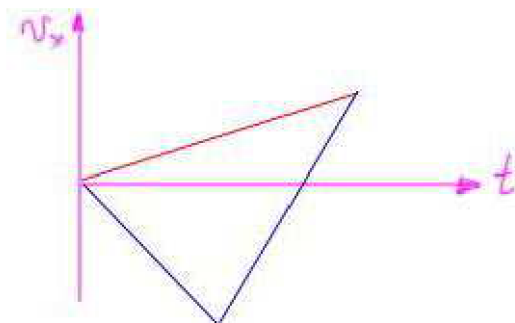
Из условия задачи неясен момент изменения направления напряжённости электрического поля. Поэтому обозначим через t_1 продолжительность движения заряженной частицы до данного изменения, через t_2 — после изменения.



Обозначая на графике изменения скоростей частиц на разных участках, составим уравнение: $(a + g)t_1 = g(t_1 + t_2) + (a - g)t_2$; из него получим $t_1 = t_2$. Таким образом, изменение направления напряжённости электрического поля произошло точно посередине между начальным и конечным моментами времени, то есть через 5 секунд после старта.

Теперь полученных данных достаточно для построения графика (см. ответ).

Отметим, что в задаче возможен и второй случай, когда $qE_x < 0$. В этом случае графики зависимости $v_x(t)$ для частиц изображены на рисунке; вывод об изменении направления напряжённости поля в момент времени 5 секунд остаётся в силе.



3 Кубик, шарик и гири

Школьница Алиса проводит опыты по измерению масс кубика и шарика при помощи равноплечих рычажных весов и гирь. Алиса обнаружила, что кубик вместе с гирей «100 г» весят больше шарика, шарик и кубик вместе весят больше гири «500 г», а гиря «500 г» весит больше гири «100 г» вместе с кубиком. В каких пределах может быть заключена масса кубика, с которым работает Алиса? А масса шарика?

Подсказка

Запишите три условия как неравенства для масс кубика и шарика и отметьте на плоскости (масса кубика, масса шарика) область, где выполняются все три сразу.

Ответ

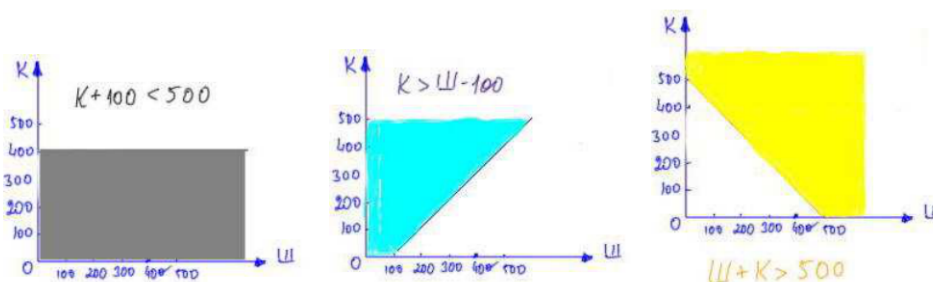
Масса шарика может лежать в промежутке от 100 г до 500 г, масса кубика — от 200 г до 400 г.

Решение

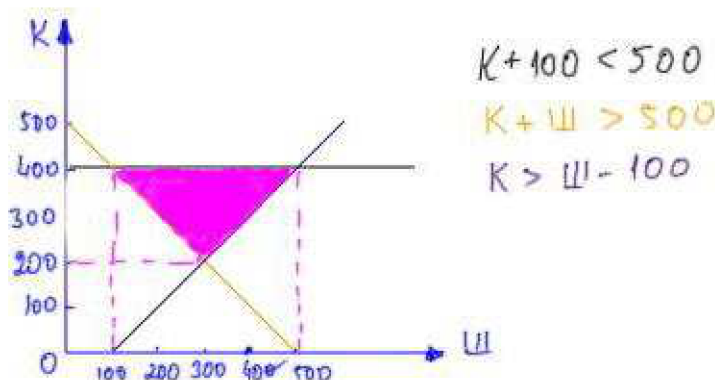
Обозначим через K массу кубика в граммах, через $Ш$ — массу шарика в граммах. Условие задачи можно записать в виде системы неравенств:

$$K + 100 > Ш, \quad K + Ш > 500, \quad K + 100 < 500.$$

Изобразим эти неравенства на графике в виде закрашенных областей, откладывая по одной оси массу кубика (в граммах), а по другой — массу шарика (в граммах).



Поскольку должны выполняться все три условия, возьмём пересечение этих областей:



Приходим к ответу.

4 Кубик, два шарика и гири

Школьница Алиса проводит опыты по измерению масс кубика и двух одинаковых шариков при помощи равноплечих рычажных весов и гирь. Алиса обнаружила, что два шарика вместе весят больше одного кубика, кубик — больше шарика и гири «100 г», а кубик, шарик и гиря «100 г» — меньше гири «1 кг». В каких пределах может быть заключена масса кубика, с которым работает Алиса? А масса шарика?

Подсказка

Запишите условия как три неравенства для масс кубика и шарика, изобразите их область на плоскости и найдите крайние точки получившегося многоугольника.

Ответ

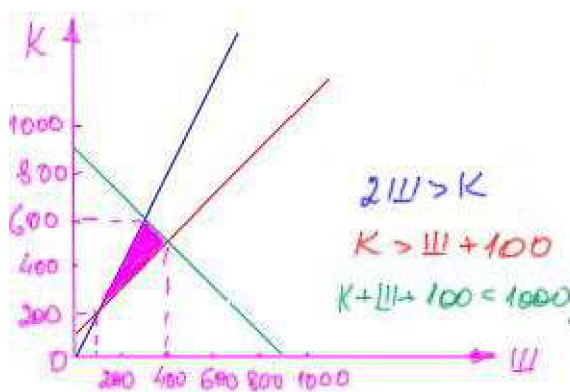
Масса шарика может лежать в промежутке от 100 г до 400 г, масса кубика — от 200 г до 600 г.

Решение

Обозначим через K массу кубика в граммах, через $Ш$ — массу шарика в граммах. Условие задачи можно записать в виде системы неравенств:

$$2 > Ш, \quad K > Ш + 100, \quad K + Ш + 100 < 1000.$$

Изобразим эту систему неравенств на графике в виде закрашенной области, откладывая по одной оси массу кубика (в граммах), а по другой — массу шарика (в граммах).



Приходим к ответу.

5 Температуры в двух калориметрах

Школьницы Алиса и Василиса хотят оценить температуру воды в калориметрах. Термометров у них нет. Смешав 100 г воды из своего калориметра и 100 г воды из ведра, где находилась смесь воды и льда, Василиса обнаружила, что полученная смесь холоднее воды в калориметре у Алисы. Смешав 200 г воды из своего калориметра и 100 г воды из чайника с кипящей водой, Алиса обнаружила, что данная смесь холоднее, чем вода в калориметре у Василисы. В каких пределах может изменяться температура в калориметре у Алисы? А в калориметре у Василисы? В каких пределах может изменяться разность температур в калориметре Алисы и температуры в калориметре Василисы?

Подсказка

Температура смеси двух порций воды определяется из уравнения теплового баланса. Запишите условия двух опытов как неравенства для t_A и t_B и изобразите их область на плоскости (t_A, t_B) .

Ответ

Температура в калориметре Алисы может быть в интервале от 25°C до 100°C , температура в калориметре Василисы — в интервале от 50°C до 100°C . Температура в калориметре Василисы выше, чем температура в калориметре Алисы; модуль разности температур может быть в промежутке от 0°C до 50°C .

Решение

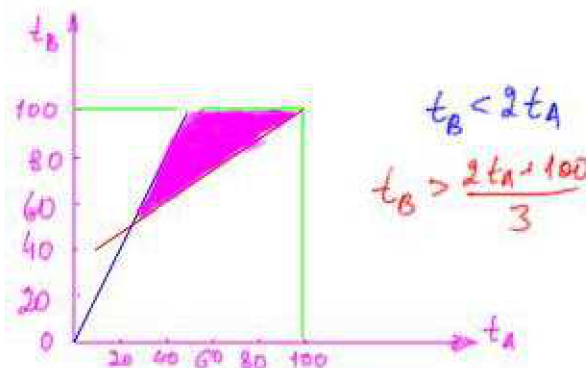
В решении используется формула для температуры смеси t_c порции воды массы m_1 и температуры t_1 с порцией воды массы m_2 и температуры t_2 . Эту формулу можно получить из уравнения теплового баланса. Первая порция воды (удельная теплоёмкость c) получает количество теплоты $cm_1(t_c - t_1)$, вторая — количество теплоты $cm_2(t_c - t_2)$, сумма этих количеств теплоты равна нулю: $cm_1(t_c - t_1) + cm_2(t_c - t_2) = 0$ и

$$t_c = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

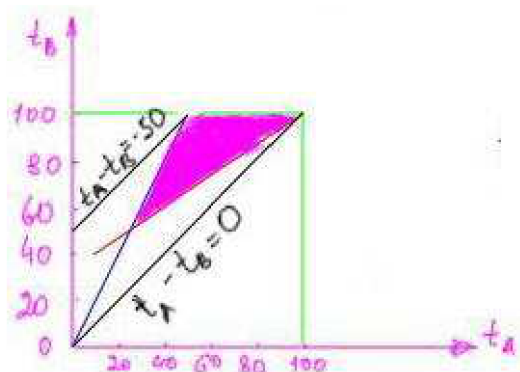
Обозначая через t_A температуру в калориметре Алисы (в градусах Цельсия), а через t_B — температуру в калориметре Василисы (в градусах Цельсия) и используя формулу для температуры смеси, запишем условие задачи в виде неравенств:

$$\frac{t_B + 0}{2} < t_A, \quad \frac{2t_A + 100}{3} < t_B.$$

Изобразим эту систему неравенств на графике в виде закрашенной области, откладывая по одной оси t_A , а по другой — t_B .



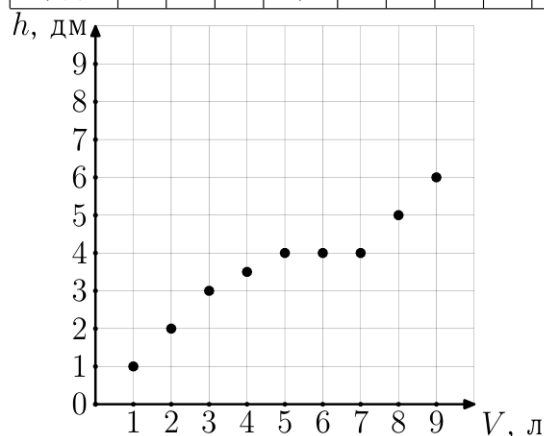
Из данного графика находим границы возможных температур в каждом из калориметров (см. ответ). Из графика также вытекает, что область возможных значений температур располагается в полосе $-50 < t_A - t_B < 0$ (между прямыми $t_A - t_B = -50$ и $t_A - t_B = 0$).



6 Сосуд сложной формы по графику

Школьник Вася проводит опыты с сосудом сложной формы. Наливая сверху в сосуд воду, Вася исследует зависимость высоты h установившегося уровня воды (в дециметрах) в сосуде от количества налитой воды V (в литрах). Полученные Васей результаты измерений представлены на графике, изображённом на рисунке, и в таблице:

V , л	1	2	3	4	5	6	7	8	9
h , дм	1	2	3	3,5	4	4	4	5	6



Нарисуйте сосуд, с которым мог проводить свой опыт Вася. Укажите на рисунке размеры сосуда.

Таблица приводилась в варианте для 7 класса, график — в варианте для 8 класса.

Подсказка

Где график идёт прямо, площадь сечения сосуда постоянна; изломы показывают, как она меняется с высотой. Что означает горизонтальный участок, где вода прибывает, а уровень не растёт?

Ответ

Возможная форма сосуда изображена на рисунке.

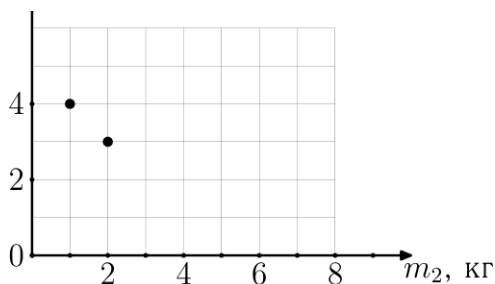


Решение

Поскольку в начале высота уровня воды пропорциональна объёму налитой воды, площадь сечения сосуда внизу может быть постоянной. Начиная с высоты 3 дм, площадь сечения сосуда увеличивается в два раза. На высоте 4 дм в сосуде должно располагаться отверстие, через которое может выливаться 2 литра воды. Выше отверстия площадь поперечного сечения сосуда может быть такой же, как и внизу. Приходим к ответу.

7 Лёд и вода в калориметре

В калориметре имеется льдинка массой 4 кг. Школьница Алиса наливает в калориметр воду и исследует, сколько льда оказывается в калориметре после установления равновесия. Алиса нанесла два своих экспериментальных результата на диаграмму, демонстрирующую зависимость массы m_1 льда в калориметре в конце процесса от массы m_2 воды, налитой в калориметр.



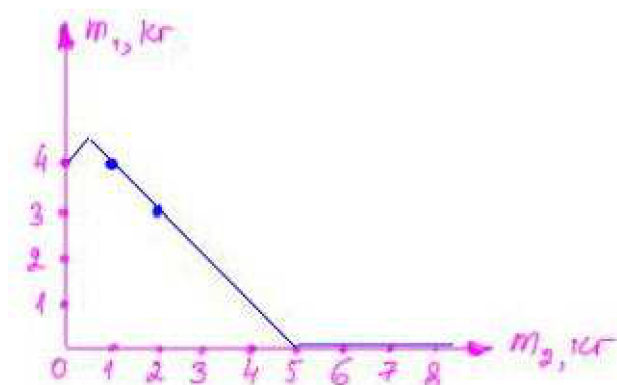
Постройте график зависимости m_1 от m_2 . При какой массе m_2 масса m_1 будет максимальной? Чему равно максимально возможное значение m_1 ? При каких значениях массы m_2 масса m_1 обратится в нуль? Чему равны начальные температуры льдинки и воды, которую Алиса налила в калориметр? Удельная теплоёмкость воды $4,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплоёмкость льда $2,1 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot ^\circ\text{C})$, удельная теплота плавления льда $336 \text{ кДж}/\text{кг}$.

Подсказка

Выделите три стадии: сначала вода целиком намерзает на льдинку, потом лёд начинает таять, потом весь лёд растаял. Каким должен быть наклон графика на каждой стадии?

Ответ

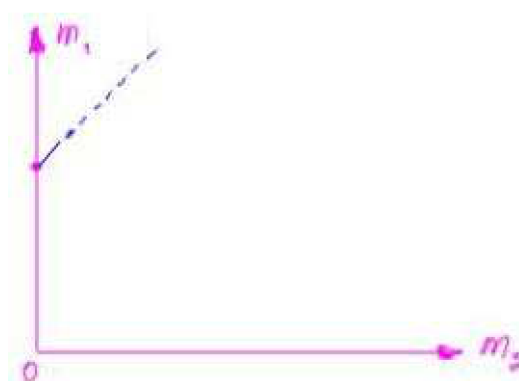
График зависимости m_1 от m_2 изображён на рисунке.



Максимальное значение m_1 , равное 4,5 кг, достигается при $m_2 = 0,5$ кг. Масса m_1 обращается в нуль, когда m_2 не меньше 5 кг. Начальная температура воды 80°C , льда -40°C .

Решение

Когда количество наливаемой воды является небольшим, она вся намораживается на льдинку. На данном этапе масса m_1 складывается из начальной массы $m_0 = 4$ кг и массы m_2 : $m_1 = m_0 + m_2$. Изобразим эту зависимость на графике:



Когда температура образовавшейся льдинки станет равна 0°C , льдинка начнёт таять. При добавлении воды (удельная теплоёмкость c) массой Δm_2 при температуре t_B (в градусах Цельсия) льдинка (удельная теплота плавления λ) будет получать количество теплоты $c \Delta m_2 \cdot t_B$, и лёд массой $c \Delta m_2 \cdot t_B / \lambda$ превратится в воду. Поэтому на втором участке график зависимости m_1 от m_2 будет прямой с отрицательным угловым коэффициентом

$$\frac{\Delta m_1}{\Delta m_2} = -\frac{c t_B}{\lambda}.$$

Наконец, на третьем этапе весь лёд расплавится, и график будет совпадать с прямой $m_1 = 0$.

Таким образом, искомый график является ломаной линией, состоящей из отрезка прямой с угловым коэффициентом, равным единице; отрезка прямой с отрицательным угловым коэффициентом и горизонтальной линии $m_1 = 0$. Учитывая две экспериментальные точки, приходим к окончательному графику (см. ответ).

Из графика видно, что максимальное значение m_1 достигается при $m_2 = 0,5$ кг. Это максимальное значение равно 4,5 кг. Масса m_1 обращается в нуль, когда m_2 не меньше 5 кг.

Температуру воды найдём из формулы для углового коэффициента на втором участке: по графику угловой коэффициент прямой равен -1 , отсюда $t_B = 80^\circ\text{C}$.

Найдём начальную температуру льдинки. При охлаждении и замерзании воды массой $m_2 = 0,5\text{ кг}$ выделяется количество теплоты $(ct_B + \lambda)m_2$. Оно идёт на нагревание льдинки массой $m_0 = 4\text{ кг}$ и удельной теплоёмкостью c_L на $\Delta t = m_2(ct_B + \lambda)/(c_L m_0) = 40^\circ\text{C}$. Поскольку именно при данном значении m_2 льдинка нагревается до 0°C , начальная температура льдинки равна -40°C .

8 Изотерма влажного воздуха

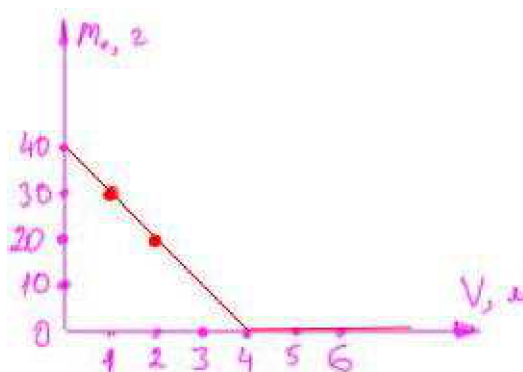
Школьник Владислав проводит изотермический процесс над влажным воздухом в цилиндре, измеряя зависимость массы воды m_1 в жидком состоянии от объёма системы V . Владислав нанёс на график две измеренные им экспериментальные точки: $(V = 1\text{ м}^3; m_1 = 30\text{ г})$ и $(V = 2\text{ м}^3; m_1 = 20\text{ г})$. Достройте данный график. Какова общая масса воды (в жидком и газообразном состояниях) в цилиндре? Какова плотность насыщенного водяного пара при данной температуре?

Подсказка

Пока в цилиндре есть жидкая вода, пар насыщенный и его плотность постоянна. Как тогда m_1 зависит от V ? Что происходит, когда вся вода испарилась?

Ответ

График зависимости m_1 от V изображён на рисунке.



Общая масса воды составляет 40 г, плотность насыщенного водяного пара 10 г/м^3 .

Решение

Когда в сосуде имеется вода в жидком состоянии, водяной пар в этом сосуде является насыщенным, с плотностью ρ . Следовательно, масса воды в газообразном состоянии равна ρV . Обозначая общую массу воды через m_0 , находим массу воды в жидком состоянии в зависимости от объёма: $m_1 = m_0 - \rho V$. Эта зависимость является линейной (см. график в ответе). Начиная с некоторого значения объёма, воды в жидком состоянии не будет.

Как вытекает из графика, общая масса воды составляет 40 г. При объёме 4 м^3 она вся оказывается в газообразном состоянии, и водяной пар ещё остаётся насыщенным. Следовательно, плотность насыщенного водяного пара $40\text{ г} : 4\text{ м}^3 = 10\text{ г/м}^3$.

9 Десять резисторов — схема на 1,7 кОм

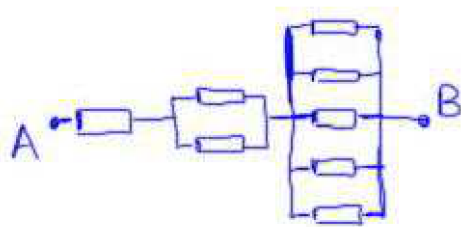
Имеются 10 резисторов сопротивлением 1 кОм. Нарисуйте схему электрической цепи, сопротивление которой как можно ближе к 1,7 кОм. Укажите на рисунке два вывода цепи, которые будут подсоединяться к прибору для измерения сопротивлений. Чему равно сопротивление Вашей цепи?

Подсказка

При последовательном соединении сопротивления складываются, а при параллельном соединении n одинаковых резисторов сопротивление уменьшается в n раз. Попробуйте набрать 1,7 кОм из долей: целое, половина, пятая часть.

Ответ

Возможная схема электрической цепи, сопротивление которой точно равно 1,7 кОм, изображена на рисунке.



10 Топливо для разгона и торможения корабля

Космонавты Ирина, Карина и Марина расположились на космической базе вдали от небесных тел. Ирина говорит: «Чтобы сообщить космическому кораблю массой в одну тонну скорость 1 км/с, надо запастись тонной горючего». Сколько топлива потребуется Ирине, чтобы сообщить кораблю массой в две тонны скорость 1 км/с? Сколько топлива потребуется Карине, чтобы сообщить кораблю массой в одну тонну скорость n км/с (в частности 3 км/с)? Сколько топлива потребуется Марине, чтобы сообщить кораблю массой в одну тонну скорость 1 км/с, а затем затормозить его?

Скорость ракеты Карины n км/с приводилась в варианте для 10 класса, скорость 3 км/с — в варианте для 7-9 классов.

Подсказка

Топливо нужно не только для груза, но и для самого оставшегося топлива. Рассмотрите разгон по ступеням в 1 км/с с конца: последняя ступень разгоняет только полезную нагрузку.

Ответ

Для разгона корабля массой 2 т до 1 км/с потребуется 2 т топлива. Для разгона корабля массой 1 т до n км/с требуется $(2^n - 1)$ т топлива. В частности, для разгона корабля массой 1 т до 3 км/с требуется 7 т топлива. Чтобы разогнать корабль массой 1 т до 1 км/с и затем затормозить, требуется 3 т топлива.

Решение

Разогнать космический корабль массой 2 т до 1 км/с — всё равно, что разогнать два космических корабля массой 1 т до 1 км/с. Поэтому потребуется 2 т топлива.

Перейдём теперь к более сложному вопросу разгона корабля массой 1 т до n км/с. Если речь идёт о разгоне со скорости $(n - 1)$ км/с до скорости n км/с (на 1 км/с), потребуется 1 т топлива. Но разгонять от скорости $(n - 2)$ км/с до скорости $(n - 1)$ км/с надо будет уже 2 т (1 т полезной нагрузки и 1 т топлива) — поэтому потребуется 2 т горючего. Учтём топливо, требуемое для разгона корабля на различных этапах в таблице:

Этап разгона	Нужно раз- гонять массу, т	Требуется топ- лива, т
от $(n - 1)$ км/с до n км/с	1	1
от $(n - 2)$ км/с до $(n - 1)$ км/с	2	2
от $(n - 3)$ км/с до $(n - 2)$ км/с	4	4
...	...	...
от 0 км/с до 1 км/с	2^{n-1}	2^{n-1}

Как видно из таблицы, начальная масса корабля с топливом составляет 2^n т, из них 1 т полезной нагрузки и $(2^n - 1)$ т топлива.

Чтобы разогнать корабль до 1 км/с и потом затормозить, требуется столько же топлива, сколько для разгона до 2 км/с (два раза надо сообщить скорость 1 км/с) — это 3 т.

11 Разряд конденсатора через резистор

Школьник Владислав проводит опыты по разрядке конденсатора через резистор. В инструкции к приборам Владислав прочитал: «Если зарядить конденсатор до заряда 1 мКл, то за секунду через резистор пройдёт заряд 0,2 мКл». Определите, какой заряд пройдёт через данный резистор при разрядке конденсатора, заряженного до 1 мКл, за две секунды, за три секунды и за n секунд.

Подсказка

Заряд, проходящий через резистор, пропорционален заряду на конденсаторе. Какая доля заряда остаётся на конденсаторе после каждой секунды?

Ответ

За две секунды через резистор пройдёт электрический заряд 0,36 мКл, за три секунды — 0,488 мКл, за n секунд — $(1 - 0,8^n)$ мКл.

Решение

Проходящий через резистор электрический заряд пропорционален заряду на конденсаторе. Из условия задачи вытекает, что конденсатор, заряженный до заряда q , за секунду уменьшит свой заряд на $0,2q$ — останется заряд $0,8q$. Таким образом, каждую секунду заряд конденсатора изменяется в $0,8$ раз.

Спустя n секунд заряд на конденсаторе станет равен $0,8^n$ мКл; следовательно, через резистор пройдёт заряд $(1 - 0,8^n)$ мКл. Подставляя значения $n = 2$ и $n = 3$, получаем ответы в частных случаях.

12 Стопка светофильтров

Светофильтр поглощает 20 процентов энергии падающего на него света, остальной свет пропускает, ничего не отражает. Какая доля падающей энергии поглотится в «стопке» из двух светофильтров, стоящих один за другим? А в стопке из трёх светофильтров? В стопке из n светофильтров?

Подсказка

Каждый светофильтр пропускает одну и ту же долю энергии, которая к нему пришла. Найдите долю, прошедшую через всю стопку, и вычтите её из единицы.

Ответ

Стопка из двух светофильтров поглощает долю энергии $0,36$, стопка из трёх светофильтров — $0,488$, из n светофильтров — $(1 - 0,8^n)$.

Решение

По условию, светофильтр пропускает $0,8$ от падающей энергии. Следовательно, стопка из n светофильтров пропускает долю $0,8^n$ от падающей энергии и поглощает долю $(1 - 0,8^n)$. Подставляя значения $n = 2$ и $n = 3$, получаем ответы в частных случаях.

13 Радиоактивный распад за годы

За год из 4 г радиоактивного вещества распадается 1 г. Сколько граммов из 4 г этого вещества распадётся за два года? А за три года? За n лет?

Подсказка

За каждый год распадается одна и та же доля имеющегося вещества, а не одно и то же количество. Во сколько раз уменьшается масса нераспавшегося вещества за год?

Ответ

За два года распадётся $1,75$ г, за три года $2,3125$ г, за n лет $4(1 - (3/4)^n)$ г.

Решение

По условию, за год распадается $1/4$ радиоактивного вещества. Поэтому количество радиоактивного вещества каждый год изменяется в $3/4$ раза. За n лет количество радиоактивного вещества изменится в $(3/4)^n$ раз и составит $(3/4)^n \cdot 4$ г. Распадётся $4(1 - (3/4)^n)$ г. Подставляя значения $n = 2$ и $n = 3$, получаем ответы в частных случаях.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2013/14, отборочный этап, 7-11 класс — условия, решения. Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.