

МОШ, 2013/14, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Квадратная пластинка скользит

По горизонтальной плоскости скользит квадратная пластинка $ABCD$. В некоторый момент времени вершина A пластинки движется со скоростью $\vec{V}_A$, равной по модулю 5 м/с, а соседняя вершина B — со скоростью $\vec{V}_B$, равной по модулю 1 м/с. При этом скорость $\vec{V}_O$ точки O — центра пластинки — направлена перпендикулярно прямой BD , являющейся диагональю квадрата. Найдите проекцию скорости $\vec{V}_O$ на направление AC в данный момент времени.

Подсказка

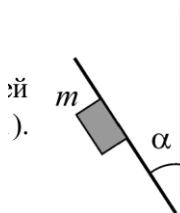
Скорость любой точки твёрдого тела — сумма скорости центра и скорости вращения вокруг центра. У вершин квадрата скорости вращения одинаковы по модулю и перпендикулярны радиусам OA , OB .

Ответ

Проекция V_O на направление AC может быть равной +4 м/с, +3 м/с, −4 м/с или −3 м/с.

2 Магнит на наклонной плите

Магнит массой m притягивается снизу к плоской металлической плите, образующей угол α с вертикалью, с постоянной силой $F = kmg$, где k — известный коэффициент ($k > 1$). Коэффициент трения между магнитом и плитой равен μ . Найдите модуль ускорения магнита.



Подсказка

Сначала выясните, может ли магнит покоиться: сравните необходимую силу трения покоя с максимально возможной μN . Если нет — сила трения скольжения известна.

Ответ

При $\mu \geq \frac{\cos \alpha}{k - \sin \alpha}$ ускорение равно нулю; при $\mu < \frac{\cos \alpha}{k - \sin \alpha}$ ускорение равно $a = g \cos \alpha - \mu g(k - \sin \alpha)$.

3 Размер стрекозы и кислород

Есть гипотеза, согласно которой размеры насекомых ограничены тем, что они потребляют воздух трахеальными трубками, выходящими на поверхность тела (то есть их воздухозабор пропорционален площади поверхности тела). Расход же кислорода, в свою очередь, пропорционален массе тела. Таким образом, можно прийти к выводу, что при увеличении насекомого в длину, высоту и ширину в одинаковое число раз, можно добиться того, что оно начнет «задыхаться» от недостатка кислорода.

Известно, что в карбоновом (каменноугольном) геологическом периоде размах крыльев стрекозы меганевры достигал 65 см. По предположениям учёных, это было возможно потому, что концентрация кислорода в атмосфере тогда составляла 35%, а не 21%, как сейчас (при той же плотности воздуха). Считая, что для времён карбона это был максимально возможный размер, оцените максимально возможный размах крыльев современной стрекозы. Сейчас стрекозы имеют примерно ту же плотность и пропорции тела, что и стрекоза периода карбона, и требуют на единицу массы не меньшее количество кислорода.

Примечание: ответ будет несколько превышать реальные размеры современных стрекоз из-за наличия других факторов, ограничивающих размер стрекозы (например, конкуренция с птицами).

Подсказка

Поступление кислорода пропорционально площади поверхности и его концентрации, расход — объёму. Как от размера l зависит отношение площади к объёму?

Ответ

Максимально возможный размах крыльев современной стрекозы может быть оценен в 39 см.

4 Сверхтяжёлая вода с тритием

В сосуде с не проводящими теплоту стенками под лёгким поршнем при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па находится $m = 1,1$ г жидкой сверхтяжёлой воды T_2O (молярная масса $\mu = 22$ г/моль) при температуре $T_1 = 0$ °С. Ядра трития (обозначаются Т, имеют атомную массу 3), входящие в состав сверхтяжёлой воды, радиоактивны. При распаде одного моля ядер трития выделяется энергия $E = 1,79$ ГДж, при этом каждую секунду в каждом моле трития распадается $N = 1,07 \cdot 10^{15}$ его ядер. Молярная изобарная теплоёмкость сверхтяжёлой воды и её пара почти такие же, как и у обычной воды ($C_v = 75,6$ Дж/(моль·К) и $C_p = 33,2$ Дж/(моль·К), соответственно). Температура кипения при нормальном давлении и молярная теплота испарения тоже близки к соответствующим значениям для обычной воды ($T_2 = 100$ °С и $L = 40$ кДж/моль). Сколько времени τ_1 потребуется, чтобы довести воду до кипения? В течение какого времени τ_2 вода будет кипеть? До какой температуры T_3 нагреется содержимое сосуда через время $\tau_3 = 2,5$ часа после начала эксперимента? Каким будет объём V сосуда к данному моменту времени? Считайте, что вся энергия, выделяющаяся при распаде трития, сообщается воде. Постоянная Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

Подсказка

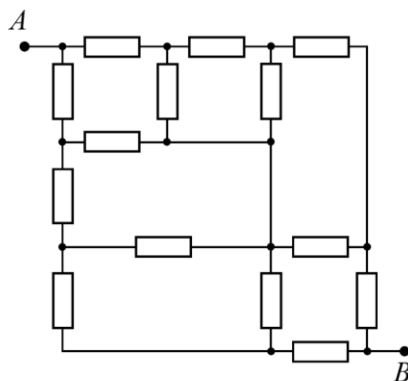
Убедитесь, что за всё время распадается малая доля ядер, так что мощность тепловыделения постоянна. Затем по этапам: нагрев воды, кипение при постоянной температуре, нагрев пара при $p = \text{const}$.

Ответ

Чтобы довести воду до кипения, требуется время $\tau_1 \approx 1184$ с; кипение воды будет происходить в течение промежутка $\tau_2 \approx 6265$ с; спустя 2,5 часа после начала эксперимента водяной пар в сосуде будет находиться при температуре $T_3 \approx 671$ К, его объём будет равен $V \approx 2,8 \cdot 10^{-3}$ м³.

5 Участок цепи из резисторов

Участок AB электрической цепи состоит из одинаковых резисторов с одинаковыми сопротивлениями R . Найдите общее сопротивление участка AB .



Подсказка

Найдите пары точек с равными потенциалами: резисторы между ними можно убрать, а точки при желании объединить.

Ответ

Сопротивление участка AB цепи равно $3R/2$.

6 Мяч в зале под потолком

В спортивном зале высотой h бросают маленький мяч с начальной скоростью V_0 . Определите, какое максимальное расстояние по горизонтали может пролететь мяч после бросания до первого удара о пол, если соударение с потолком абсолютно упругое. Считайте, что мяч бросают с уровня пола. Пол и потолок горизонтальны, сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Подсказка

Без потолка наибольшая дальность V_0^2/g достигается при угле 45° . Проверьте, достигает ли такая траектория потолка; если да, оптимальная траектория касается потолка.

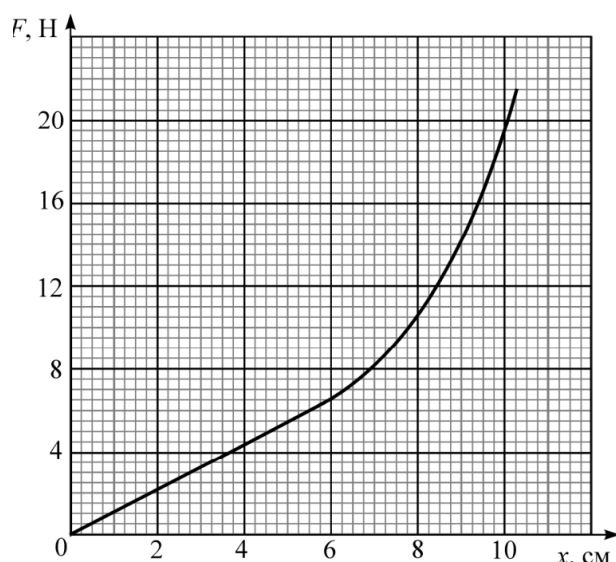
Ответ

Максимальное расстояние полёта мяча по горизонтали между двумя последовательными ударами о пол равно

$$S = \frac{V_0^2}{g} \quad \text{при } V_0 \leq 2\sqrt{gh}; \quad S = 4h\sqrt{\frac{V_0^2}{2gh} - 1} \quad \text{при } V_0 > 2\sqrt{gh}.$$

7 Груз на пружине с нелинейным графиком

На рисунке показан график зависимости модуля силы F растяжения пружины от её удлинения x (при больших деформациях пружина не подчиняется закону Гука). Пружину прикрепляют одним концом к потолку. К другому концу пружины, не деформируя её, аккуратно подвешивают груз массой $m = 650$ г, после чего отпускают груз без начальной скорости. Оцените, на какую максимальную длину растянется пружина? Трением и массой пружины пренебrecь, ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с².



Подсказка

В нижней точке скорость груза равна нулю: работа силы тяжести равна приросту энергии пружины, то есть площади под графиком $F(x)$. Подберите x по клеткам.

Ответ

Пружина растянется на максимальную длину $x_0 \approx 10$ см.

8 Три кипятильника на аккумуляторе

В комнате с температурой воздуха $t_k = 25$ °C находится батарея аккумуляторов с суммарной ЭДС $U = 200$ В и суммарным внутренним сопротивлением $r = 20$ Ом. Выводы батареи подсоединены к электрической розетке. Изначально в эту розетку был включен кипятильник номер 1 с сопротивлением $R = 200$ Ом, опущенный в стакан с холодной водой, которую он смог прогреть только до температуры $t_1 = 50$ °C. Потом кипятильник вынули из розетки и вставили в неё разветвитель питания (так называемый «тройник»). К первым двум его выходам подключили кипятильники номер 1 и номер 2 (такой же, как кипятильник 1), а к третьему — кипятильник номер 3, той же формы, изготовленный из тех же материалов, но все размеры которого в $n = 2$ раза меньше, чем у кипятильника номер 1. Эти кипятильники положили в стаканы с холодной водой: кипятильники 1 и 3 — в такие же, что и изначально, а кипятильник 2 — в стакан, все размеры которого в n раз меньше, чем у исходного стакана. До каких температур t_2 и t_3 , соответственно, нагреется за длительное время вода в стаканах, в которые помещены кипятильники 2 и 3? Мощность тепловых потерь через единицу площади поверхности считайте пропорциональной разности температур.

Подсказка

В установившемся режиме мощность кипятильника равна мощности теплопотерь, а они пропорциональны площади стакана и разности температур. Сопротивление проволоки при уменьшении всех размеров в n раз растёт в n раз.

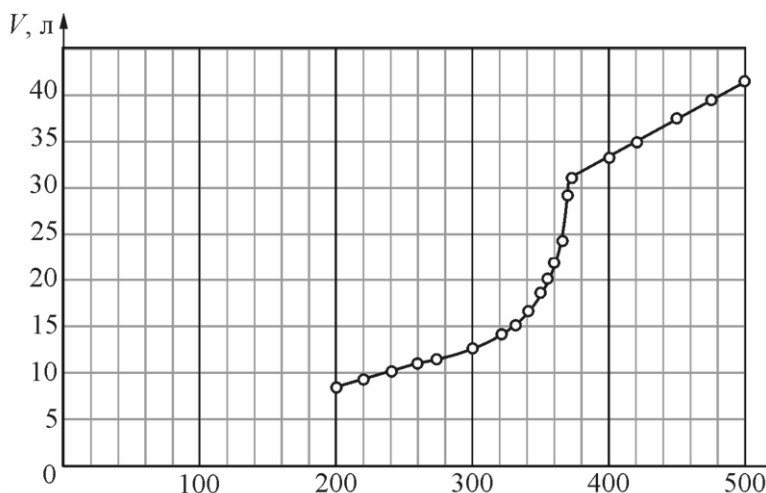
Ответ

В стакане, в который помещён кипятильник 2, вода нагреется до 100°C (закипит); в стакане, в который помещён кипятильник 3, вода нагреется до температуры

$$t_3 = t_k + (t_1 - t_k) n \left(\frac{r + R}{(2n + 1)r + nR} \right)^2 \approx 34,7^\circ\text{C}.$$

9 Лёд в цилиндре у Знайки

Знайка решил провести исследования Гей-Люссака для идеального газа, только более аккуратно. Для этих целей он взял цилиндрический сосуд большого объёма с поршнем, который мог двигаться практически без трения, вынул поршень, и охладил их до температуры 200 K . Затем он вставил поршень обратно в сосуд так, что внутри оказался охлаждённый до той же температуры воздух, обеспечил постоянное давление, и провёл измерения зависимости объёма V газа в сосуде от температуры T . По полученным результатам Знайка построил график (см. рисунок). Найденная зависимость мало напоминала результаты, полученные Гей-Люссаком. Знайка понял свою ошибку. Он вставил поршень в цилиндр при температуре 200 K и, очевидно, на дне сосуда при этом оказалось некоторое количество льда, который образовался из воды, сконденсировавшейся при охлаждении воздуха. Оцените массу льда, который оказался в цилиндре у Знайки, если давление в течение опыта было равно $2 \cdot 10^5\text{ Па}$. Молярная масса воды 18 г/моль .



Подсказка

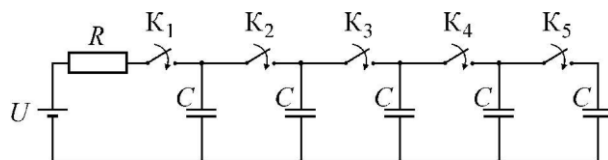
Найдите по графику количество газа $pV/(RT)$ при 200 K (только воздух) и при 500 K (воздух и весь пар). Разность — количество воды.

Ответ

Масса льда, который оказался в цилиндре у Знайки, равна 18 г .

10 Конденсаторы и пять ключей

В цепи, схема которой изображена на рисунке, по очереди замыкают ключи $K_1 - K_5$, выжидая каждый раз достаточно длительное время до окончания процессов зарядки конденсаторов. Во сколько раз отличаются количества теплоты, выделившиеся в резисторе R после замыкания ключа K_1 и ключа K_5 ? До его замыкания все остальные ключи уже были замкнуты. Сопротивления всех проводов и источника тока пренебрежимо малы.



Подсказка

Тепло в R — это работа источника минус энергия, запасённая в конденсаторах, но при замыкании ключа заряд ещё и быстро перераспределяется между конденсаторами без участия R — эта часть энергии в R не выделяется.

Ответ

Количества теплоты, выделившиеся в резисторе R после замыкания ключа K_1 и ключа K_5 , отличаются в $Q_1/Q_5 = 5$ раз.