

МОШ, 2013/14, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Чемодан в тормозящем поезде

Подходящий к станции поезд движется со скоростью $V = 36$ км/ч. Один из пассажиров поставил чемодан на пол длинного коридора вагона. Но тут поезд начал тормозить, двигаясь до полной остановки равнозамедленно с ускорением, равным по модулю $a = 2$ м/с². Чемодан при этом стал скользить по полу и прошёл до своей полной остановки путь $S = 12$ м относительно вагона. Определите коэффициент трения между чемоданом и полом, а также модуль максимальной скорости, которую имел чемодан относительно вагона.

Подсказка

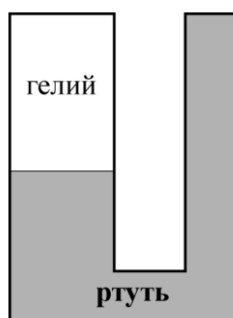
Чемодан скользит с постоянным ускорением μg , поезд тормозит с ускорением a . Запишите движение чемодана относительно вагона и подумайте, в какой момент их относительная скорость максимальна.

Ответ

Коэффициент трения $\mu = \frac{aV^2}{g(2aS + V^2)} = \frac{5}{37} \approx 0,135$; максимальная скорость чемодана относительно вагона $u_{\max} = \frac{2aSV}{2aS + V^2} \approx 3,24$ м/с.

2 Гелий над ртутью

На рисунке изображены два вертикальных сообщающихся цилиндрических сосуда. Верх левого сосуда герметично запаян, и этот сосуд частично заполнен гелием. Правый сосуд до краёв наполнен ртутью так, что часть ртути находится в левом сосуде, и гелий заперт ею. Система помещена в вакуум. Гелию начинают медленно сообщать теплоту и продолжают нагревание до тех пор, пока ртуть остаётся в левом сосуде. Определите удельную теплоёмкость гелия в этом процессе.



Подсказка

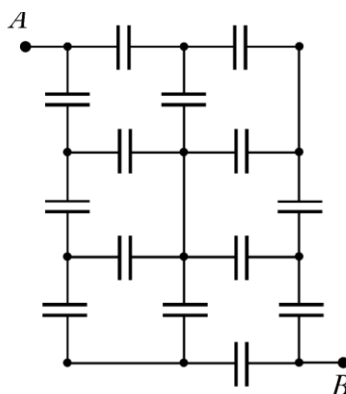
Правый сосуд заполнен до краёв, поэтому по мере расширения гелия ртуть выливается. Как давление гелия связано с его объёмом в этом процессе?

Ответ

Удельная теплоёмкость гелия в данном процессе $c = \frac{2R}{\mu} = 4155 \text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, где μ — молярная масса гелия.

3 Участок цепи из конденсаторов

Участок AB электрической цепи состоит из одинаковых конденсаторов ёмкостью C каждый. Найдите общую ёмкость участка AB .



Подсказка

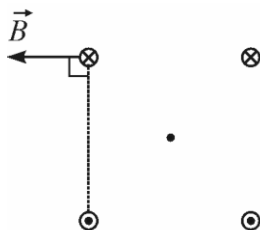
Найдите точки схемы с равными потенциалами: их можно соединить проводником, а конденсатор между ними можно выбросить.

Ответ

Общая ёмкость участка AB равна $2C/3$.

4 Четыре провода с током

Как показали эксперименты Ж.-Б. Био и Ф. Савара 1820 года, магнитное поле длинного провода с током убывает обратно пропорционально расстоянию от длинного прямого провода. Четыре очень длинных прямых провода с протекающими по ним равными по модулю постоянными токами расположены параллельно друг другу так, как показано на рисунке (сечения проводов плоскостью рисунка находятся в вершинах квадрата). Известно, что модуль вектора индукции магнитного поля, создаваемого одним проводом в соседней с ним вершине этого квадрата, равен B , а поле самого провода на его оси равно нулю.



Найдите модуль суммарного вектора магнитной индукции в каждой вершине указанного квадрата. Найдите также модуль вектора индукции магнитного поля в центре этого квадрата.

Подсказка

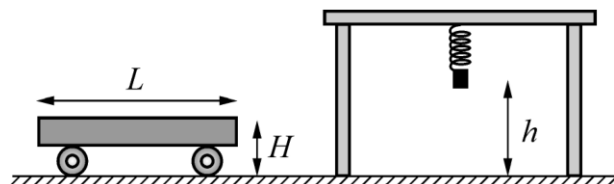
Вектор индукции поля прямого провода перпендикулярен прямой, соединяющей провод с точкой наблюдения. Поле от диагонального провода слабее в $\sqrt{2}$ раз, а его направление найдите по правилу буравчика.

Ответ

В каждой вершине квадрата $B_1 = \sqrt{5/2} B$; в центре квадрата $B_2 = 4B$.

5 Груз на пружине под столом

Тележка высотой $H = 30$ см и длиной $L = 40$ см должна проехать под столом по горизонтальному полу, двигаясь равномерно и прямолинейно. К крышке стола снизу прикрепили лёгкую пружину жёсткостью $k = 50$ Н/м. К пружине прицепили маленький груз массой $m = 0,4$ кг. При недеформированной пружине груз находился на высоте $h = 42$ см над полом. Затем груз отпустили. С какой минимальной скоростью может двигаться тележка, чтобы она, проехав под столом, не задела груз?



Подсказка

Груз совершает гармонические колебания около положения равновесия. Тележка должна проехать то время, пока груз находится выше её крыши.

Ответ

Минимальная скорость тележки

$$v = \frac{L\sqrt{k/m}}{2\left(\pi - \arccos \frac{h - H - x_0}{x_0}\right)} = \frac{3\omega L}{4\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1,07 \text{ м/с},$$

где $x_0 = mg/k$ — амплитуда колебаний груза.

6 Лодка с сопротивлением воды

Лодку массой m отправили на другой берег речки, сообщив ей начальную скорость V_0 в направлении, перпендикулярном течению. Ширина речки H , скорость её течения V_T , а время движения лодки от берега до берега t .

1. На какое расстояние l (вдоль берега) снесло лодку течением при переправе?
2. Чему был равен модуль скорости лодки относительно воды в конце переправы, если сила $\vec{F}$ сопротивления движению, действующая на лодку со стороны воды, пропорциональна скорости $\vec{V}_{\text{отн}}$ лодки относительно воды ($\vec{F} = -k\vec{V}_{\text{отн}}$, где k — известный постоянный коэффициент)?

Считайте, что скорость течения одинакова во всех точках речки.

Подсказка

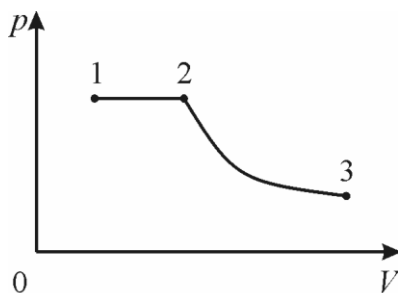
Перейдите в систему отсчёта, связанную с водой: в ней лодка движется по прямой, а изменение её скорости пропорционально пройденному пути.

Ответ

$$1) l = V_T \left(t - \frac{H}{V_0} \right); \quad 2) V'_K = \sqrt{V_0^2 + V_T^2} \left(1 - \frac{kH}{mV_0} \right), \text{ причём } V_0 \geq kH/m.$$

7 Жидкость и пар под поршнем

В гладком цилиндре под подвижным поршнем находятся в равновесии ν молей жидкости и ν молей её пара (состояние 1 на pV -диаграмме). Систему «жидкость–пар» сначала медленно нагрели в изобарическом процессе 1–2, при этом её абсолютная температура возросла в 2 раза. Затем систему медленно охладили в адиабатическом процессе 2–3 до температуры T_3 . Какое количество теплоты получила система «жидкость–пар» в процессе 1–2, если работы, совершённые этой системой в процессах 1–2 и 2–3, были одинаковыми? Молярная теплота парообразования в процессе 1–2 равна r . В процессе 2–3 конденсация не происходит. Считать пар идеальным газом с молярной теплоёмкостью в изохорном процессе $C_V = 3R$. Объём жидкости в состоянии 1 считать пренебрежимо малым по сравнению с объёмом пара.



Подсказка

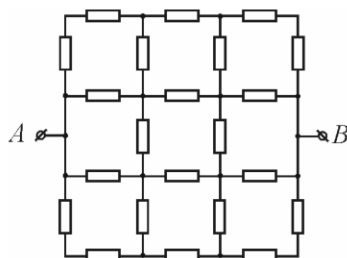
В состоянии 1 пар насыщенный, а в состоянии 2 жидкости уже нет. Выразите обе работы через температуры и приравняйте.

Ответ

$$\text{Система получит в процессе 1–2 количество теплоты } Q_{12} = \nu \left(r + \frac{16RT_3}{3} \right).$$

8 Мостик из резисторов

В схеме, изображённой на рисунке, все резисторы одинаковые и имеют сопротивление R . Найдите сопротивление между точками A и B этой схемы.



Подсказка

Подключите к схеме вспомогательный источник и найдите пары точек с одинаковыми потенциалами: их можно соединить или разомкнуть, не меняя токов.

Ответ

$$R_{AB} = \frac{13}{14}R.$$

9 Сближение заряженных шариков

Небольшой шарик, заряженный зарядом q , покоится на гладком горизонтальном непроводящем столе. К шарiku присоединена горизонтальная пружина жёсткостью k , второй конец которой закреплён. Вдоль оси пружины к шарiku с большого расстояния очень медленно приближают такой же, но противоположно заряженный шарик. Найдите деформацию пружины в момент столкновения шариков.

Подсказка

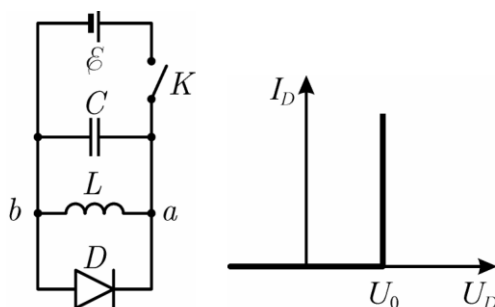
Положения равновесия шарика на пружине определяются равенством силы упругости и кулоновской силы. Столкновение происходит в момент потери устойчивости, когда два корня этого уравнения сливаются.

Ответ

В момент столкновения шариков деформация пружины $l = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 k} \right)^{1/3}$.

10 Диод, катушка и конденсатор

В цепи, схема которой изображена на рисунке, катушка имеет индуктивность L , ёмкость конденсатора равна C , сопротивление источника, активное сопротивление катушки и сопротивления проводов пренебрежимо малы. Вольтамперная характеристика диода D изображена на графике (I_D — сила текущего через диод тока; $U_D = \varphi_b - \varphi_a$, где φ_a и φ_b — потенциалы соответствующих точек цепи). В начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C не заряжен. Ключ K замыкают на время $t_0 < \sqrt{LC}$, а затем снова размыкают. Определите отношение ЭДС источника $\mathcal{E}$ к напряжению U_0 , при котором открывается диод, если заряд, прошедший через диод после размыкания ключа, в n раз больше заряда, прошедшего через катушку за время t_0 , пока ключ был замкнут.



Подсказка

Пока ключ замкнут, конденсатор заряжен до $\mathcal{E}$, а ток катушки растёт линейно. После размыкания, пока диод открыт, напряжение на конденсаторе постоянно и равно U_0 .

Ответ

$$\frac{\mathcal{E}}{U_0} = \frac{nt_0^2 + \sqrt{n^2 t_0^4 + 4LC(LC + t_0^2)}}{2(LC + t_0^2)}.$$