

МОШ, 2014/15, отборочный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Лёд и шарики в воде

У школьницы Арины в холодильнике имеются ледяные кубики (все одинаковые) и шарики (все одинаковые). На столе у Арины — два одинаковых сосуда с одинаковым количеством воды комнатной температуры. В первый сосуд Арина положила шарик и далее стала класть ледяные кубики (по одному); она увидела, что шарик и три кубика полностью растаяли, а четвёртый кубик — растаял частично. Во второй сосуд Арина сначала положила один ледяной кубик, а затем — шарики. Она увидела, что кубик и два шарика полностью растаяли, а третий шарик — растаял частично. Чему может быть равно отношение массы шарика к массе кубика? Отношение в ответе записывайте в виде обыкновенной дроби. Потерями тепла можно пренебречь.

Подсказка

Найдите, какая наибольшая масса льда из холодильника ещё полностью тает в сосуде с водой. Тогда оба опыта превратятся в неравенства для масс шарика и кубика.

Ответ

Отношение массы шарика к массе кубика может быть от 1 до 3.

Решение

Пусть C — общая теплоёмкость воды и сосуда, $c_{\text{л}}$ — удельная теплоёмкость льда, λ — удельная теплота плавления льда, $t_{\text{к}}$ — комнатная температура, $t_{\text{х}}$ — температура в холодильнике. Исследуем, в каком случае льдинка массой m , взятая из холодильника, при погружении в сосуд полностью растает. Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении воды и сосуда до 0°C , составляет $Ct_{\text{к}}$. Его должно хватить на нагревание льдинки до 0°C (требуемое количество теплоты $c_{\text{л}}m|t_{\text{х}}|$) и на её плавление (требуется количество теплоты λm). Следовательно, льдинка растает полностью при

$$Ct_{\text{к}} > c_{\text{л}}m|t_{\text{х}}| + \lambda m, \quad \text{или при} \quad m < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda}.$$

По условию задачи,

$$m_{\text{ш}} + 3m_{\text{к}} < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} < m_{\text{ш}} + 4m_{\text{к}}, \quad m_{\text{к}} + 2m_{\text{ш}} < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} < m_{\text{к}} + 3m_{\text{ш}}.$$

Обозначая

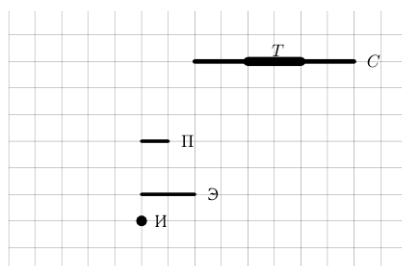
$$M = \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} - m_{\text{ш}} - m_{\text{к}},$$

получаем $2m_{\text{к}} < M < 3m_{\text{к}}$ и $m_{\text{ш}} < M < 2m_{\text{ш}}$. Это то же самое, что условие задачи о гире неизвестной массы M и кубиках с шариками (задача 3а): из первого неравенства $\frac{1}{3}M < m_{\text{к}} < \frac{1}{2}M$, из второго $\frac{1}{2}M < m_{\text{ш}} < M$. Следовательно,

$$1 < \frac{m_{\text{ш}}}{m_{\text{к}}} < 3.$$

2 Зеркало для тени предмета

Источник света И отделён от стены С непрозрачным экраном Э (вид сверху показан на рисунке). Как надо расположить плоское зеркало, чтобы предмет П отбрасывал на стену тень Т, а остальная часть стены была освещена? Перерисуйте рисунок к себе в работу, нарисовав дополнительно зеркало. Постарайтесь использовать зеркало как можно меньшего размера.

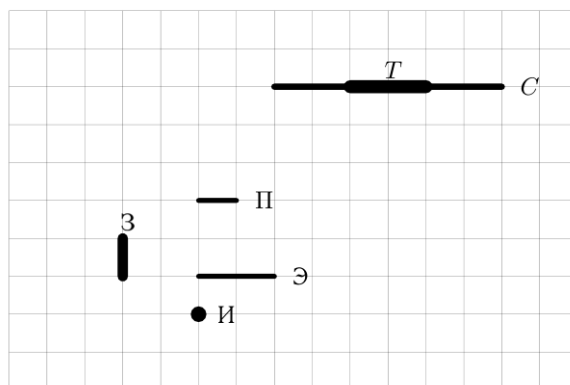


Подсказка

Тень от предмета П получится, если лучи расходятся из некоторой точки за зеркалом. Где должна находиться эта точка по отношению к источнику И и зеркалу?

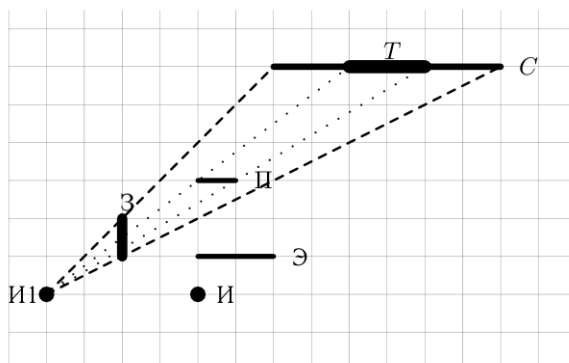
Ответ

Зеркало минимального размера изображено на рисунке.



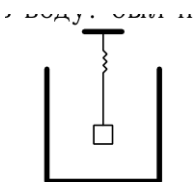
Решение

Чтобы предмет П отбрасывал тень Т, продолжения лучей света должны выходить из точки 1 . Эта точка 1 должна являться изображением источника света И в зеркале. Отсюда однозначно определяем положение плоскости зеркала. Учитывая, что лучи света должны обязательно освещать концы стены, находим минимально возможный размер зеркала.



3 Пружина и груз над сосудом

Школьница Алиса проводит опыты с пружиной. Она подвесила пружину с грузом над сосудом в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рисунке, и стала наливать в сосуд воду. Груз имеет форму куба длиной ребра 10 см, его плотность равна плотности воды. В начале опыта расстояние от нижней грани груза до дна сосуда составляет 30 см. Площадь основания сосуда составляет 1000 см^2 . Нижняя грань куба во время опыта сохраняла горизонтальное положение. Жёсткость пружины 100 Н/м , её длина в нерастянутом состоянии составляет 10 см. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 . Постройте график зависимости длины пружины l от объёма воды V , налитой в сосуд. При каких значениях объёма V груз находился в воздухе? был частично погружён в воду? был полностью погружён в воду?



Подсказка

Пока груз в воздухе, длина пружины постоянна. Когда уровень воды дойдёт до нижней грани куба, начнёт действовать сила Архимеда, зависящая от глубины погружения; найдите объём воды, при котором уровень достигнет нижней и верхней граней груза.

Ответ

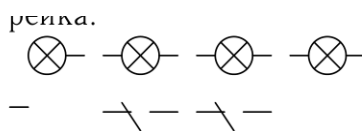
График состоит из горизонтальной линии $l = 20 \text{ см}$ при $V < 30 \text{ л}$ (груз в воздухе), наклонного участка, соединяющего точки $(20 \text{ см}; 30 \text{ л})$ и $(10 \text{ см}; 49 \text{ л})$ (груз при V от 30 л до 49 л частично погружён в воду), горизонтальной линии $l = 10 \text{ см}$ при $V > 49 \text{ л}$ (груз полностью в воде).

4 Цепь из лампочек и ключей

Школьник Ярослав решил сконструировать такую электрическую цепь из изображённых на рисунке четырёх лампочек, двух ключей и проводов, чтобы выполнялись следующие требования.

1. При подсоединении цепи к батарее при любом положении ключей должны гореть все четыре лампочки.
2. При переключении любого из ключей яркость хотя бы одной лампочки должна обязательно измениться.
3. При любом положении ключей одна лампочка должна обязательно гореть в полный накал (напряжение на ней должно быть равно напряжению на батарее).
4. При любом положении ключей три лампочки должны обязательно гореть в треть накала (напряжение на каждой из лампочек должно быть равно одной трети от напряжения на батарее).

Помогите Ярославу сконструировать схему электрической цепи, удовлетворяющую как можно большему числу перечисленных требований. Укажите, к каким точкам цепи подсоединяется батарея.

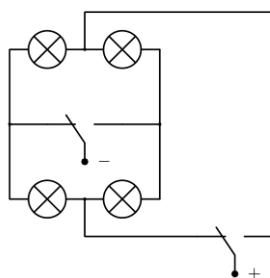


Подсказка

Чтобы одна лампочка горела в полный накал, а три — в треть, нужна цепь, в которой при любом положении ключей напряжение делится между одной лампочкой и группой из трёх последовательно соединённых.

Ответ

Возможная схема электрической цепи, удовлетворяющая всем заявленным требованиям, представлена на рисунке.



5 Бросок вверх с неизвестной высотой

Тело бросили с поверхности земли вертикально вверх. Спустя 2 секунды после броска тело ещё двигалось вверх, а спустя 6 секунд после броска — уже находилось на земле. На какой высоте могло находиться тело в верхней точке траектории? Столкновение тела с землёй считайте абсолютно неупругим, ускорение свободного падения 10 м/с^2 , сопротивлением воздуха можно пренебречь.

Подсказка

Выразите высоту подъёма через начальную скорость и запишите, какие ограничения на начальную скорость дают два момента времени из условия.

Ответ

Тело в верхней точке траектории могло находиться на высоте от 20 м до 45 м.

Решение

Введём обозначения: $t_1 = 2 \text{ с}$, $t_2 = 6 \text{ с}$, $g = 10 \text{ м/с}^2$. Пусть v_0 — начальная скорость тела.

В момент времени t_1 вертикальная проекция скорости тела $v_0 - gt_1$ положительна, отсюда $v_0 > gt_1$. Промежуток времени t_2 должен быть больше, чем время полёта тела $2v_0/g$. Следовательно, $v_0 < gt_2/2$.

Поскольку высота тела, брошенного вверх со скоростью v_0 , в верхней точке траектории равна $H = v_0^2/(2g)$, получаем: $gt_1^2/2 < H < gt_2^2/8$. Подстановка числовых значений даёт $20 \text{ м} < H < 45 \text{ м}$.

6 Линейка с грузиком на краю стола

Экспериментатор проводит опыты с однородной деревянной линейкой длиной 40 см и грузиком. Оказалось, что если уравнивать линейку с грузиком на краю стола, то линейка начинает падать, когда длина её выступающей части превосходит 10 см (грузик при этом подвешивают на нитку за конец линейки). Если же при этом опустить грузик в стакан с водой, плотность которой равна 1000 кг/м^3 , эта длина становится равной 15 см (грузик при этом оказывается полностью погружён в воду). Определите отношение массы груза к массе линейки и плотность груза.

Подсказка

Запишите правило моментов относительно края стола в обоих опытах; во втором опыте на груз вместо mg действует сила, уменьшенная на силу Архимеда.

Ответ

Отношение массы груза к массе линейки равно 1, отношение плотности груза к плотности воды равно $3/2$ (плотность груза 1500 кг/м^3).

Решение

Пусть $L = 40 \text{ см}$ — длина линейки, $a = 10 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$ — длины выступающей части линейки в двух опытах, m — масса груза, M — масса линейки, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, ρ — плотность грузика.

Пусть длина выступающей части линейки равна a . К линейке приложены силы mg — на расстоянии a от оси вращения и Mg на расстоянии $L/2 - a$ от оси вращения. Поскольку линейка находится в равновесии, на основе правила рычага получим: $mga = Mg(L/2 - a)$ и $M/m = a/(L/2 - a) = 1$.

Пусть длина выступающей части линейки равна b . К концу линейки приложена сила F , равная разности силы тяжести mg , действующей на груз, и силы Архимеда $\rho_0 g \cdot m/\rho$: $F = mg(1 - \rho_0/\rho)$. К середине линейки, на расстоянии $L/2 - b$ от оси вращения, приложена сила Mg . По правилу рычага, $Fb = Mg(L/2 - b)$. Отсюда

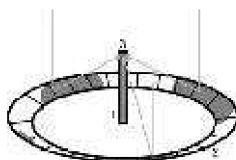
$$mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) b = Mg \left(\frac{L}{2} - b\right)$$

и

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{M}{m} \cdot \frac{L/2 - b}{b} = \frac{2}{3}.$$

7 Зеркальное кольцо для кипячения воды

Для кипячения воды предлагается использовать конструкцию следующего типа. Большое кольцо 2, ограниченное двумя концентрическими окружностями, покрыто высококачественными зеркалами, наклонёнными так, что весь отражаемый свет фокусируется в точку 3, где на высокой колонне 1 располагается резервуар с водой. Зеркала покрывают всё пространство между окружностями. Считая, что от зеркала отражается всё падающее на него излучение, а солнечные лучи перпендикулярны поверхности земли, оцените, сколько воды будет превращаться в пар за 1 секунду. Внутренний и внешний радиусы кольца равны 5 м и 10 м; мощность солнечного излучения, достигающего поверхности земли в расчёте на 1 м^2 , равна 900 Вт; для нагревания 1 кг воды до кипения и превращения этой воды в пар требуется количество теплоты 2300 кДж.



Подсказка

Всё излучение, падающее на площадь кольца, собирается в одной точке. Найдите мощность, а затем энергию за секунду и сравните её с теплотой на 1 кг воды.

Ответ

За секунду в пар превращается 92 г воды.

Решение

Обозначим через $Q_0 = 2300$ кДж количество теплоты, требуемое для нагревания и превращения $m_0 = 1$ кг воды в пар, $P_0 = 900$ Вт — мощность солнечного излучения, падающего на $S_0 = 1$ м² поверхности земли, $r = 5$ м и $R = 10$ м — внутренний и внешний радиусы кольца, $\tau = 1$ с.

Падающая на зеркало мощность P относится к мощности P_0 так же, как площадь зеркала $\pi(R^2 - r^2)$ относится к площади S_0 . Отсюда $P = P_0 \cdot \pi(R^2 - r^2)/S_0$. Масса испарившейся за время τ воды m относится к массе m_0 так же, как полученная энергия $P\tau$ относится к количеству теплоты Q_0 ; отсюда $m = m_0 P\tau/Q_0$ и

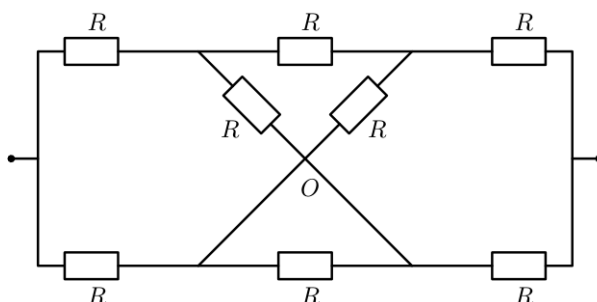
$$m = m_0 \frac{P_0 \pi(R^2 - r^2) \tau}{S_0 Q_0} = 0,092 \text{ кг} = 92 \text{ г}.$$

8 Резисторы со схемой через узел O

Электрическая цепь состоит из одинаковых резисторов сопротивлением $R = 2,8$ кОм. Найдите общее сопротивление цепи в двух случаях:

- (а) в точке O соединения нет;
- (б) в точке O соединение есть.

Сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь.



Подсказка

Обозначьте токи в ветвях и приравняйте напряжение между входом и выходом, вычисленное по разным путям; симметрия цепи подскажет, какие токи равны или в каком отношении.

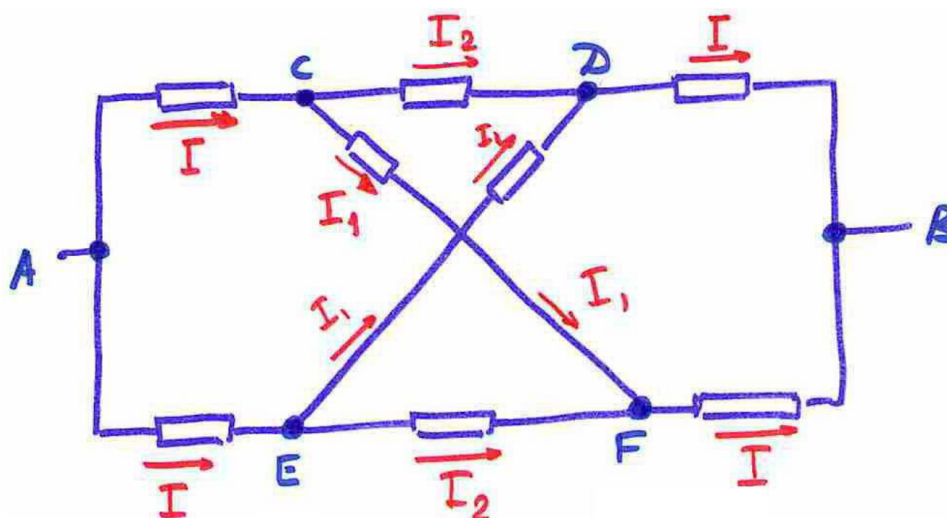
Ответ

Если в точке O соединения нет, сопротивление цепи равно $3,5 \text{ кОм}$; если в точке O соединение есть, сопротивление цепи равно $3,2 \text{ кОм}$.

Решение

Пусть к концам электрической цепи подключена батарейка с напряжением U .

(а) Пусть в точке O соединения нет. Изобразим на рисунке электрические токи.



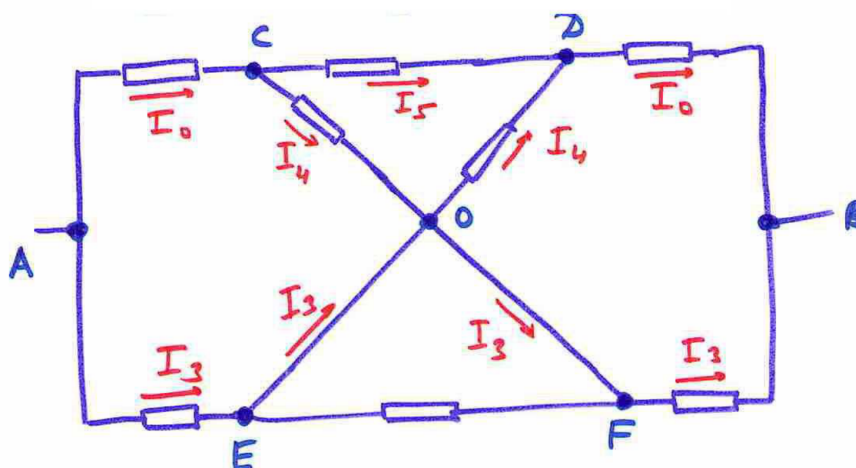
Рассчитывая напряжение между точками A и B разными способами, получим:

1. $U = IR + I_2R + IR$, путь $ACDB$;
2. $U = IR + I_1R + IR$, путь $ACFB$.

Следовательно, $I_1 = I_2$. Учитывая, что в точку C втекает ток I , а вытекают два равных тока I_1 и I_2 , получим: $I_1 = I_2 = I/2$. Следовательно, $U = 2,5IR$; сила тока через батарейку составляет $2I$ и сопротивление цепи:

$$R_1 = \frac{2,5IR}{2I} = 1,25R = 3,5 \text{ кОм}.$$

(б) Пусть в точке O соединение есть. Изобразим на рисунке электрические токи.



Учтём, что на резисторе, подсоединённом к точкам E и F , напряжение и ток равны нулю. Рассчитывая напряжение между точками A и B разными способами, получим:

1. $U = I_3 R + I_3 R$, путь $A E F B$ (отсюда $I_3 = U/(2R)$);
2. $U = I_0 R + I_5 R + I_0 R$, путь $A C D B$;
3. $U = I_0 R + I_4 R + I_4 R + I_0 R$, путь $A C O D B$.

Следовательно, $I_5 = 2I_4$. Учитывая, что в точку C втекает ток I_0 , а вытекают два равных тока I_4 и $I_5 = 2I_4$, получим: $I_4 = I_0/3$, $I_5 = 2I_0/3$. Следовательно, $U = 8I_0 R/3$ и $I_0 = 3U/(8R)$.

Общая сила тока через батарейку равна:

$$I_0 + I_3 = \frac{U}{2R} + \frac{3U}{8R} = \frac{7U}{8R}.$$

Следовательно, сопротивление цепи равно

$$R_2 = \frac{U}{7U/(8R)} = \frac{8}{7}R = 3,2 \text{ кОм}.$$