

МОШ, 2014/15, отборочный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Лёд и шарики в воде

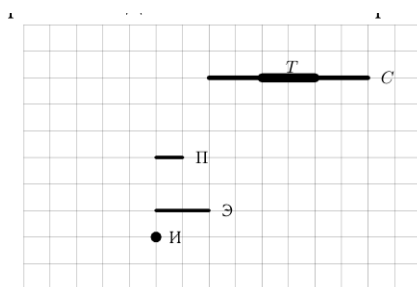
У школьницы Арины в холодильнике имеются ледяные кубики (все одинаковые) и шарики (все одинаковые). На столе у Арины — два одинаковых сосуда с одинаковым количеством воды комнатной температуры. В первый сосуд Арина положила шарик и далее стала класть ледяные кубики (по одному); она увидела, что шарик и три кубика полностью растаяли, а четвёртый кубик — растаял частично. Во второй сосуд Арина сначала положила один ледяной кубик, а затем — шарики. Она увидела, что кубик и два шарика полностью растаяли, а третий шарик — растаял частично. Чему может быть равно отношение массы шарика к массе кубика? Отношение в ответе записывайте в виде обыкновенной дроби. Потерями тепла можно пренебречь.

Ответ

Отношение массы шарика к массе кубика может быть от 1 до 3.

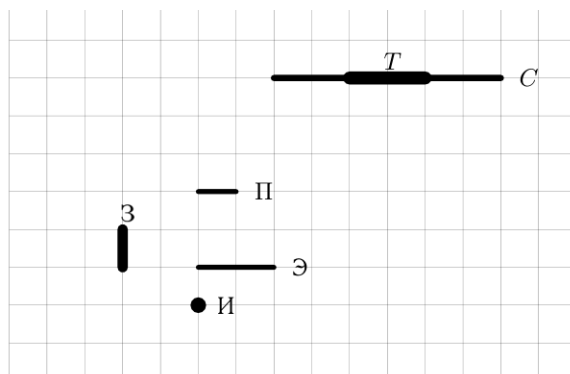
2 Зеркало для тени предмета

Источник света И отделён от стены С непрозрачным экраном Э (вид сверху показан на рисунке). Как надо расположить плоское зеркало, чтобы предмет П отбрасывал на стену тень Т, а остальная часть стены была освещена? Перерисуйте рисунок к себе в работу, нарисовав дополнительно зеркало. Постарайтесь использовать зеркало как можно меньшего размера.



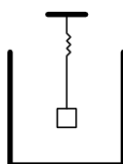
Ответ

Зеркало минимального размера изображено на рисунке.



3 Пружина и груз над сосудом

Школьница Алиса проводит опыты с пружиной. Она подвесила пружину с грузом над сосудом в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рисунке, и стала наливать в сосуд воду. Груз имеет форму куба длиной ребра 10 см, его плотность равна плотности воды. В начале опыта расстояние от нижней грани груза до дна сосуда составляет 30 см. Площадь основания сосуда составляет 1000 см^2 . Нижняя грань куба во время опыта сохраняла горизонтальное положение. Жёсткость пружины 100 Н/м , её длина в нерастянутом состоянии составляет 10 см. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 . Постройте график зависимости длины пружины l от объёма воды V , налитой в сосуд. При каких значениях объёма V груз находился в воздухе? был частично погружён в воду? был полностью погружён в воду?



Ответ

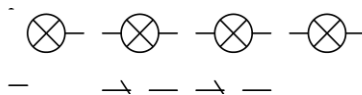
График состоит из горизонтальной линии $l = 20 \text{ см}$ при $V < 30 \text{ л}$ (груз в воздухе), наклонного участка, соединяющего точки ($V = 30 \text{ л}$; $l = 20 \text{ см}$) и ($V = 49 \text{ л}$; $l = 10 \text{ см}$) (груз при V от 30 л до 49 л частично погружён в воду), горизонтальной линии $l = 10 \text{ см}$ при $V > 49 \text{ л}$ (груз полностью в воде).

4 Цепь из лампочек и ключей

Школьник Ярослав решил сконструировать такую электрическую цепь из изображённых на рисунке четырёх лампочек, двух ключей и проводов, чтобы выполнялись следующие требования.

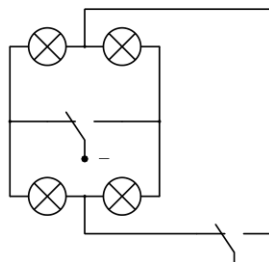
1. При подсоединении цепи к батарее при любом положении ключей должны гореть все четыре лампочки.
2. При переключении любого из ключей яркость хотя бы одной лампочки должна обязательно измениться.
3. При любом положении ключей одна лампочка должна обязательно гореть в полный накал (напряжение на ней должно быть равно напряжению на батарее).
4. При любом положении ключей три лампочки должны обязательно гореть в треть накала (напряжение на каждой из лампочек должно быть равно одной трети от напряжения на батарее).

Помогите Ярославу сконструировать схему электрической цепи, удовлетворяющую как можно большему числу перечисленных требований. Укажите, к каким точкам цепи подсоединяется батарея.



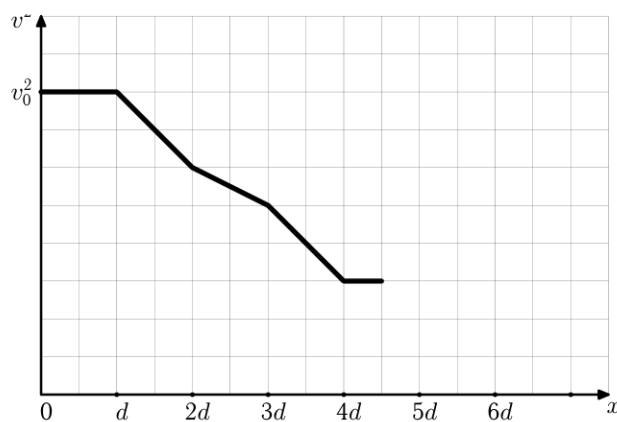
Ответ

Возможная схема электрической цепи, удовлетворяющая всем заявленным требованиям, представлена на рисунке.



5 Электрон между заряженными сетками

Вдоль оси x движется электрон. Перпендикулярно оси x располагаются заряженные металлические сетки, размеры которых много больше расстояния между ними. На рисунке представлен график зависимости квадрата скорости электрона от координаты x . Найдите x -координаты сеток. Считая заряд первой из сеток, через которую пролетел электрон, равным q , найдите заряды остальных сеток. Для электрона, запущенного из начала координат вдоль оси x с вдвое меньшей скоростью $v_0/2$, постройте графики зависимости квадрата скорости от координаты и проекции скорости v_x от времени.



Ответ

Координаты сеток и их электрические заряды: $x = d, 2d, 3d, 4d$ и заряды $+q, -q/2, +q/2, -q$ соответственно.

При запуске электрона со скоростью $v_0/2$ график зависимости квадрата скорости от координаты представлен на рисунке:

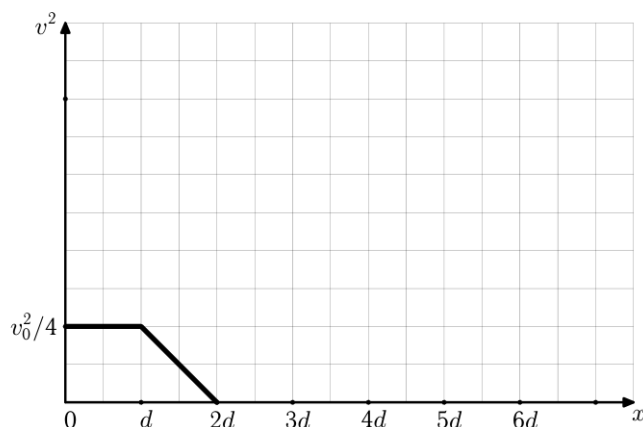
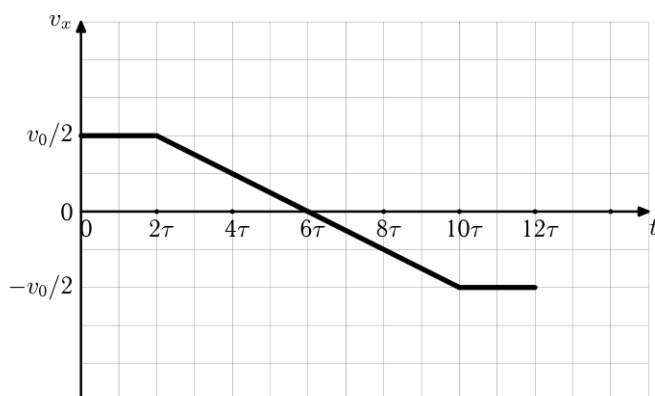


График зависимости проекции скорости v_x от времени t (введено обозначение $\tau = d/v_0$):



6 Тень воздушного шарика на ветру

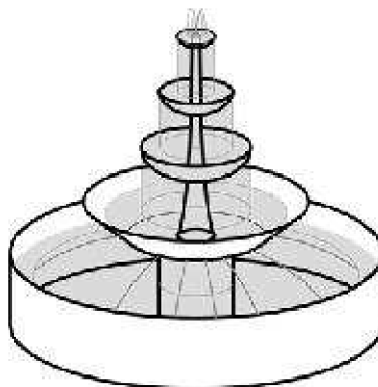
В солнечную и безоблачную, но ветреную погоду школьник Ярослав запускает непрозрачный воздушный шарик, заполненный гелием. Двигаясь горизонтально со скоростью $u = 2$ м/с, Ярослав обнаружил, что шарик (в системе отсчёта, связанной с Ярославом) поднимается вертикально вверх со скоростью $v = 1$ м/с. Солнечные лучи падают на горизонтальную поверхность под углом 45° к вертикали. С какой скоростью может двигаться по земле тень шарика?

Ответ

Модуль скорости тени может принимать значения в диапазоне от $|u - v| = 1$ м/с до $u + v = 3$ м/с.

7 Фонтан из нескольких чаш

В фонтан, изображённый на рисунке, по центральной трубке площадью поперечного сечения $S = 50 \text{ см}^2$ подаётся вода, которая вертикально бьёт из отверстия, расположенного на уровне воды верхнего сосуда, на высоту $h = 20 \text{ см}$. Три верхних сосуда полностью заполнены водой, которая стекает из одного в другой, переливаясь через края сосудов. Четвёртый сосуд (считая сверху) — это широкая чаша. Чтобы поддерживать в ней почти постоянный уровень воды в течение длительного времени, по периметру чаши у её дна каждые $\tau = 2 \text{ мин}$ на некоторый промежуток времени открываются горизонтальные трубки общей площадью $S_0 = 900 \text{ см}^2$. Из этих трубок вода бьёт на расстояние $L = 50 \text{ см}$, считая по горизонтали, и попадает в пятый сосуд, где с помощью сливных каналов поддерживается постоянный уровень воды. Каждый следующий уровень воды расположен ниже предыдущего на $H = 45 \text{ см}$ (расстояния измеряются между поверхностями воды). Какую скорость имеет вода при попадании в третий сосуд? На какой промежуток времени открываются горизонтальные трубки через каждые 2 минуты? Сопротивлением воздуха и вязкостью воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Ответ

Скорость воды при попадании в третий сосуд $\sqrt{2gH} = 3 \text{ м/с}$; горизонтальные трубки надо открыть на время $t_1 = \frac{2S\sqrt{hH}}{S_0L} \tau = 8 \text{ с}$.

8 Смешивание воды в стакане

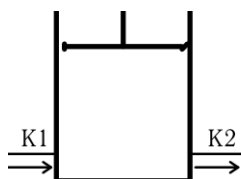
Школьница Алиса проводит опыты с двумя одинаковыми стаканами. Первый стакан Алиса заполнила водой комнатной температуры $t_0 = 20^\circ\text{C}$ до половины объёма, а затем долила столько же воды с температурой $t_1 = 30^\circ\text{C}$. Алиса была уверена, что установившаяся температура будет равна 25°C ; однако она оказалась равной $t_2 = 23^\circ\text{C}$. Как могла рассуждать Алиса и почему конечная температура оказалась другой? Какая температура t_3 установится во втором стакане, если Алиса заполнит его сначала водой комнатной температуры на одну треть и затем дополнит доверху водой температуры $t_1 = 30^\circ\text{C}$? Потерями тепла в окружающее пространство за время установления температуры можно пренебречь.

Ответ

Конечная температура в опыте со вторым стаканом составляет $t_3 = 24^\circ\text{C}$.

9 Цилиндр с клапанами

В цилиндре с поршнем, где находится воздух, имеются два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Система клапанов работает таким образом, что давление в цилиндре поддерживается в промежутке от $0,8p_0$ до $1,4p_0$, где $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па — атмосферное давление: как только давление в цилиндре падает ниже $0,8p_0$, открывается впускной клапан, и давление становится равным $0,8p_0$; при превышении давлением значения $1,4p_0$ открывается выпускной клапан, и давление падает до $1,4p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания, в процессе которых объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$, где $V_0 = 22,4$ л. Постройте график зависимости давления воздуха в цилиндре от его объёма в данном процессе. Объясните Ваше построение. Считайте, что с момента начала опыта уже прошло несколько колебаний. Определите наименьшее и наибольшее число молей воздуха в цилиндре. Температура постоянна и равна $T_0 = 273$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

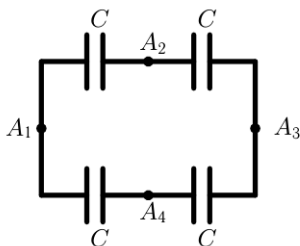


Ответ

Количество вещества в цилиндре принимает значения от 1,4 моль до 1,6 моль; зависимость давления от объёма приведена на графике (см. решение).

10 Цепь из четырёх конденсаторов

На рисунке изображена схема электрической цепи, составленной из четырёх первоначально незаряженных конденсаторов ёмкости C . Сначала к точкам A_1 и A_3 подключили батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r . Когда ток через батарейку стал пренебрежимо малым, батарейку отключили, а к точкам A_1 и A_2 подключили резистор R , который также отключили, когда ток через него стал пренебрежимо мал. Найдите электрические заряды на каждой из пластин конденсаторов (а) после отключения батарейки; (б) после отключения резистора. Каким был максимальный электрический ток через резистор в данном процессе? Какое количество теплоты выделилось на резисторе? Получите ответы в виде общих формул и в частном случае $\mathcal{E} = 6$ В, $r = 1$ Ом, $C = 1$ мФ, $R = 1$ кОм.

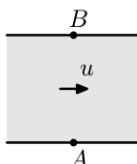


Ответ

Заряды на обкладках конденсаторов на различных этапах приведены на рисунках в решении, причём $q = C\varepsilon/2 = 3 \text{ мКл}$, $q_1 = 4q/3 = 4 \text{ мКл}$, $q_2 = 2q/3 = 2 \text{ мКл}$; максимальная сила тока через резистор $I_{\max} = \varepsilon/(2R) = 3 \text{ мА}$; на резисторе выделяется количество теплоты $C\varepsilon^2/6 = 6 \text{ мДж}$.

11 Переправа через реку с наименьшим сносом

Школьник Вася, находящийся в точке А, собирается переплыть на противоположный берег реки и оказаться как можно ближе к точке В, расположенной точно напротив точки А. Ширина реки равна L , скорость течения реки равна u , скорость Васи в стоячей воде равна v . Определите, на каком минимальном расстоянии от точки В может оказаться Вася после переправы. Объясните Ваш ответ. Изобразите на рисунке векторы скорости течения реки, скорости Васи в стоячей воде и скорости Васи относительно берега при оптимальном способе переправы. Решите задачу в общем случае и в частных случаях (а) $u = 0,8 \text{ м/с}$, $v = 1 \text{ м/с}$, $L = 100 \text{ м}$; (б) $u = 1 \text{ м/с}$, $v = 0,8 \text{ м/с}$, $L = 100 \text{ м}$.

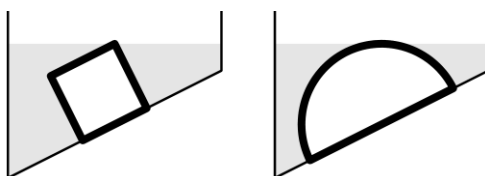


Ответ

При $v > u$ (в том числе в случае (а)) искомое минимальное расстояние равно нулю. При $v < u$ (в том числе в случае (б)) Вася может оказаться от точки В на минимальном расстоянии $x = L\sqrt{u^2 - v^2}/v$. В случае (б) $x = 75 \text{ м}$.

12 Давление воды на кубик и полусферу

Школьница Ирина проводит опыты с сосудами с наклонным дном. На дне первого сосуда — кубик, на дне второго сосуда — полусфера. Уровень воды в каждом сосуде точно совпадает с положением наивысшей точки кубика или полусферы. Оказалось, что сила давления, действующая со стороны воды как на кубик, так и на полусферу (без учёта атмосферного давления), направлена горизонтально. Под каким углом к горизонту наклонено дно первого сосуда? Второго сосуда? Вода под кубик и полусферу не подтекает.

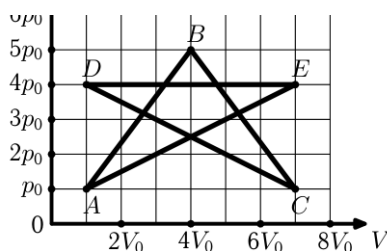


Ответ

Дно первого сосуда наклонено под углом, тангенс которого равен $1/2$. Дно второго сосуда наклонено под углом, косинус которого равен $2/3$ (тангенс $\sqrt{5}/2 \approx 1,12$).

13 Цикл-звезда на pV -диаграмме

Над идеальным газом совершают циклический процесс, который на pV -диаграмме изображается в виде звезды, соединяющей точки $A(p_0; V_0)$, $B(5p_0; 4V_0)$, $C(p_0; 7V_0)$, $D(4p_0; V_0)$, $E(4p_0; 7V_0)$ и $A(p_0; V_0)$. Как выразить работу A , совершённую газом за цикл, через площади образовавшихся на рисунке треугольников и пятиугольника? Выразите эту работу через параметры p_0 и V_0 . Рассчитайте численное значение работы, если минимальная температура газа равна $T_0 = 100$ К, а количество вещества составляет $\nu = 1$ моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).

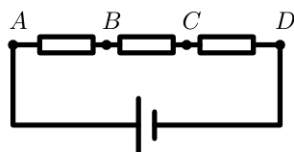


Ответ

Работа газа равна сумме площадей треугольников и удвоенной площади пятиугольника. Она равна $A = 12\nu RT_0 = 10$ кДж.

14 Вольтметр с конечным сопротивлением

Школьник Станислав проводит опыты с электрической цепью, состоящей из трёх одинаковых резисторов и батарейки. Подключив вольтметр к клеммам А и В, Станислав записал показания прибора $U_{AB} = 4$ В. Станислав был уверен, что показание вольтметра при подключении к клеммам А и С составит 8 В, а при подключении к клеммам А и D будет равно 12 В. Действительно, одно из показаний прибора совпало с предсказаниями Станислава: $U_{AD} = 12$ В. Однако второе показание оказалось неожиданным: $U_{AC} = 7$ В. Как мог рассуждать Станислав? Почему одно из показаний прибора было предсказано неправильно? Какую информацию о характеристиках приборов можно получить на основе проведённых измерений? Считайте, что сила тока через вольтметр пропорциональна напряжению на нём.



Ответ

ЭДС батарейки составляет 28 В; внутреннее сопротивление батарейки, сопротивление резистора и сопротивление вольтметра равны.

15 Протон на окружности в E и B

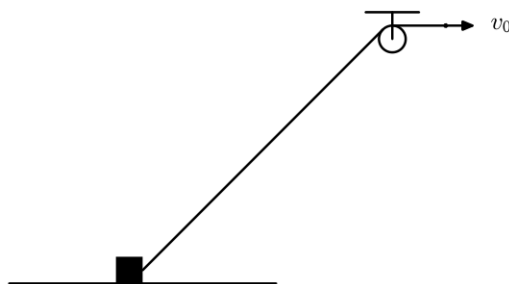
Протон (заряд $+e$, масса m) движется в электромагнитном поле по окружности радиуса R . В каждой точке траектории электрическое поле направлено к центру окружности и равно E . Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости окружности и равна B . При каких условиях на параметры задачи протон движется со скоростью, много меньшей скорости света? Какой может быть кинетическая энергия протона? Решите задачу в общем случае и получите численный ответ в двух частных случаях: (а) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0$; (б) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0,1$ Тл. Ответ представьте в электронвольтах (1 эВ — энергия, получаемая протоном при прохождении разности потенциалов 1 В). Элементарный заряд составляет $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Ответ

Скорость протона много меньше скорости света при условиях $BR \ll mc/e$ и $ER \ll mc^2/e$. Кинетическая энергия протона может быть равна $K = \frac{1}{2}eRE \left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right)$, где $\alpha = eB^2R/(2mE)$. В случае (а) $K = 500$ эВ, в случае (б) $K = 470$ кэВ или $K = 0,53$ эВ.

16 Груз на нити через блок

К грузу массой m , находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена невесомая нерастяжимая нить, перекинута через блок. Школьник Вася вытягивает горизонтальный конец нити с постоянной скоростью v_0 . С какой скоростью движется груз в момент, когда наклонный участок нити составляет угол α с горизонтом? Чему равна сила натяжения нити в этот момент времени? При каких соотношениях параметров задачи груз оторвется от горизонтальной поверхности? Блок находится на высоте H , размерами блока и груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .

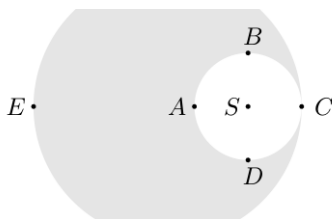


Ответ

Скорость бруска $u = \frac{v_0}{\cos \alpha}$, сила натяжения нити $T = \frac{mv_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{H \cos \alpha}$; брусок оторвется от горизонтальной поверхности, когда величина $v_0^2 \operatorname{tg}^4 \alpha / H$ достигнет g .

17 Астероид со сферической полостью

Космонавты, высадившиеся на астероид радиусом $R = 5$ км, обнаружили внутри астероида сферическую полость радиусом $r = 2$ км. Оказалось, что в центре S полости ускорение свободного падения составляет $g_S = 0,2$ см/с². Определите плотность астероида, считая её постоянной. Изобразите на рисунке векторы ускорения свободного падения в точках А, В, С, D, E. Определите модули ускорения свободного падения в этих точках. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².

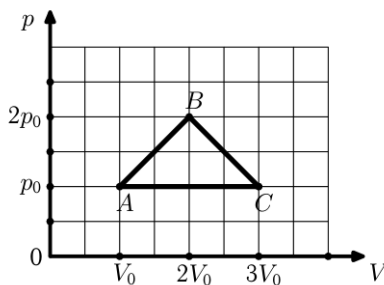


Ответ

Плотность астероида $\rho = \frac{g_S}{\frac{4}{3}\pi G(R-r)} \simeq 2,4 \cdot 10^3$ кг/м³; вектор ускорения свободного падения в точках А, В, С, D равен вектору ускорения в точке S; в точке E ускорение свободного падения направлено к центру астероида и равно по величине $g_S \frac{1}{R-r} \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2} \right) = 0,32$ см/с². Сами векторы изображены на рисунке в решении.

18 Треугольный цикл одноатомного газа

Над идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс $ABCA$, изображённый на pV -диаграмме в виде треугольника с вершинами $A(p_0; V_0)$, $B(2p_0; 2V_0)$, $C(p_0; 3V_0)$. Определите, на каких участках цикла происходит теплообмен с нагревателями, на каких — с холодильниками. Чему равно количество теплоты, полученное газом от нагревателя? А отданное холодильнику?



Ответ

На участке ABK происходит теплообмен с нагревателем, на участке KCA — с холодильником (K — середина отрезка BC). Количества теплоты, полученное от нагревателя и отданное холодильнику: $Q_+ = 6,5 p_0 V_0$, $Q_- = 5,5 p_0 V_0$.

19 Трансформатор: возможные напряжения

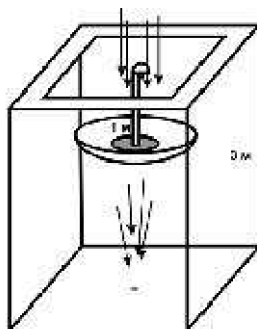
Школьник Владислав проводит опыты с трансформатором и источником питания, который выдаёт переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, где $U_0 = 12$ В. Трансформатор имеет две обмотки с двумя выводами у каждой. Число витков первой обмотки N , второй обмотки $3N$. Переменные напряжения с какими амплитудами может получить Владислав с помощью данного оборудования? Для каждого значения амплитуды напряжения нарисуйте соответствующую схему соединений.

Ответ

Можно получить напряжения с амплитудами колебаний: 0 В, 3 В, 4 В, 6 В, 8 В, 9 В, 12 В, 16 В, 18 В, 24 В, 36 В, 48 В.

20 Лужица в зонте как линза

В потолке чердака высотой 3 м расположена плоская дверца из прозрачного стекла, на ручке которой висит зонт из прозрачного пластика. В куполе зонта со временем скопилось немного воды. В момент, когда солнечные лучи перпендикулярны поверхности земли, свет, проникающий на чердак сквозь люк, проходя сквозь воду в зонте, собирается в яркую точку на полу. Длина ручки зонта составляет 1 м. Какой высоты покажется потолок в комнате, если в пасмурный день лечь на пол и смотреть вверх сквозь лужицу в зонте?

**Ответ**

Наблюдателю на полу покажется, что потолок имеет высоту 4 м.