

МОШ, 2014/15, отборочный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Лёд и шарики в воде

У школьницы Арины в холодильнике имеются ледяные кубики (все одинаковые) и шарики (все одинаковые). На столе у Арины — два одинаковых сосуда с одинаковым количеством воды комнатной температуры. В первый сосуд Арина положила шарик и далее стала класть ледяные кубики (по одному); она увидела, что шарик и три кубика полностью растаяли, а четвёртый кубик — растаял частично. Во второй сосуд Арина сначала положила один ледяной кубик, а затем — шарики. Она увидела, что кубик и два шарика полностью растаяли, а третий шарик — растаял частично. Чему может быть равно отношение массы шарика к массе кубика? Отношение в ответе записывайте в виде обыкновенной дроби. Потерями тепла можно пренебречь.

Подсказка

Выясните, при какой массе льдинки, взятой из холодильника, вся она успевает растаять за счёт остывания воды и сосуда до 0°C . Тогда оба опыта превратятся в пару неравенств на одну и ту же предельную массу.

Ответ

Отношение массы шарика к массе кубика может быть от 1 до 3.

Решение

Пусть C — общая теплоёмкость воды и сосуда, $c_{\text{л}}$ — удельная теплоёмкость льда, λ — удельная теплота плавления льда, $t_{\text{к}}$ — комнатная температура, $t_{\text{х}}$ — температура в холодильнике. Исследуем, в каком случае льдинка массой m , взятая из холодильника, при погружении в сосуд полностью растает. Количество теплоты, выделяющееся при охлаждении воды и сосуда до 0°C , составляет $Ct_{\text{к}}$. Его должно хватить на нагревание льдинки до 0°C (требуемое количество теплоты $c_{\text{л}}m|t_{\text{х}}|$) и на её плавление (требуется количество теплоты λm). Следовательно, льдинка растает полностью при

$$Ct_{\text{к}} > c_{\text{л}}m|t_{\text{х}}| + \lambda m, \quad \text{или при} \quad m < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda}.$$

По условию задачи

$$m_{\text{ш}} + 3m_{\text{к}} < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} < m_{\text{ш}} + 4m_{\text{к}}, \quad m_{\text{к}} + 2m_{\text{ш}} < \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} < m_{\text{к}} + 3m_{\text{ш}}.$$

Обозначая

$$M = \frac{Ct_{\text{к}}}{c_{\text{л}}|t_{\text{х}}| + \lambda} - m_{\text{ш}} - m_{\text{к}},$$

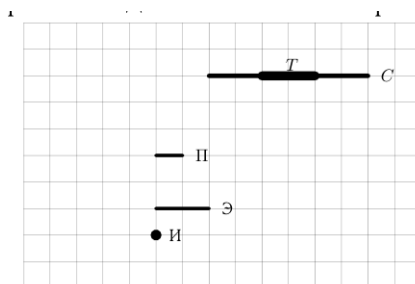
приведём неравенства к виду

$$2m_{\text{к}} < M < 3m_{\text{к}}, \quad m_{\text{ш}} < M < 2m_{\text{ш}}.$$

Эти соотношения можно записать как $\frac{1}{3}M < m_{\text{к}} < \frac{1}{2}M$ и $\frac{1}{2}M < m_{\text{ш}} < M$. Следовательно, $1 < m_{\text{ш}} : m_{\text{к}} < 3$.

2 Зеркало для тени предмета

Источник света И отделён от стены С непрозрачным экраном Э (вид сверху показан на рисунке). Как надо расположить плоское зеркало, чтобы предмет П отбрасывал на стену тень Т, а остальная часть стены была освещена? Перерисуйте рисунок к себе в работу, нарисовав дополнительно зеркало. Постарайтесь использовать зеркало как можно меньшего размера.

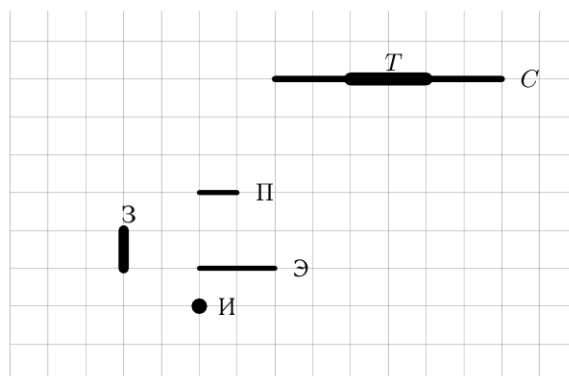


Подсказка

Лучи, отражённые зеркалом, выглядят так, будто выходят из изображения источника в зеркале. Где должно находиться это изображение, чтобы предмет П отбрасывал именно тень Т?

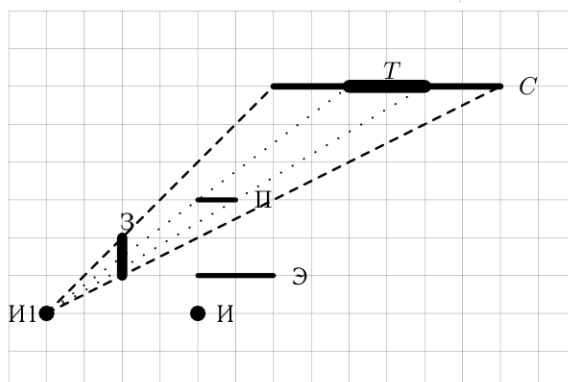
Ответ

Зеркало минимального размера изображено на рисунке.



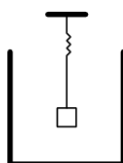
Решение

Чтобы предмет П отбрасывал тень Т, продолжения лучей света должны выходить из точки I_1 . Эта точка I_1 должна являться изображением источника света И в зеркале. Отсюда однозначно определяем положение плоскости зеркала. Учтя, что лучи света должны обязательно освещать концы стены, находим минимально возможный размер зеркала.



3 Пружина и груз над сосудом

Школьница Алиса проводит опыты с пружиной. Она подвесила пружину с грузом над сосудом в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рисунке, и стала наливать в сосуд воду. Груз имеет форму куба длиной ребра 10 см, его плотность равна плотности воды. В начале опыта расстояние от нижней грани груза до дна сосуда составляет 30 см. Площадь основания сосуда составляет 1000 см^2 . Нижняя грань куба во время опыта сохраняла горизонтальное положение. Жёсткость пружины 100 Н/м , её длина в нерастянутом состоянии составляет 10 см. Ускорение свободного падения 10 м/с^2 . Постройте график зависимости длины пружины l от объёма воды V , налитой в сосуд. При каких значениях объёма V груз находился в воздухе? был частично погружён в воду? был полностью погружён в воду?



Подсказка

Масса груза известна, поэтому легко найти начальную длину пружины. Затем определите, при каком объёме воды уровень дойдёт до нижней грани куба и до его верхней грани, и как меняется сила Архимеда между этими моментами.

Ответ

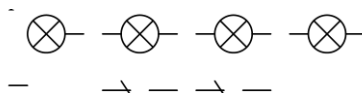
График состоит из горизонтальной линии $l = 20 \text{ см}$ при $V < 30 \text{ л}$ (груз в воздухе), наклонного участка, соединяющего точки ($V = 30 \text{ л}$; $l = 20 \text{ см}$) и ($V = 49 \text{ л}$; $l = 10 \text{ см}$) (груз при V от 30 л до 49 л частично погружён в воду), горизонтальной линии $l = 10 \text{ см}$ при $V > 49 \text{ л}$ (груз полностью в воде).

4 Цепь из лампочек и ключей

Школьник Ярослав решил сконструировать такую электрическую цепь из изображённых на рисунке четырёх лампочек, двух ключей и проводов, чтобы выполнялись следующие требования.

1. При подсоединении цепи к батарее при любом положении ключей должны гореть все четыре лампочки.
2. При переключении любого из ключей яркость хотя бы одной лампочки должна обязательно измениться.
3. При любом положении ключей одна лампочка должна обязательно гореть в полный накал (напряжение на ней должно быть равно напряжению на батарее).
4. При любом положении ключей три лампочки должны обязательно гореть в треть накала (напряжение на каждой из лампочек должно быть равно одной трети от напряжения на батарее).

Помогите Ярославу сконструировать схему электрической цепи, удовлетворяющую как можно большему числу перечисленных требований. Укажите, к каким точкам цепи подсоединяется батарея.

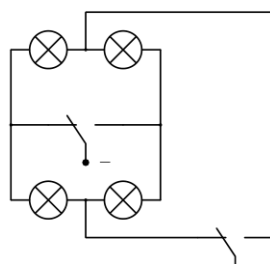


Подсказка

Лампочка горит в полный накал, если она подключена непосредственно к батарее, а три лампочки делят напряжение поровну при последовательном соединении. Подумайте, как ключ может замыкать накоротко часть цепи, не гася ни одной лампочки.

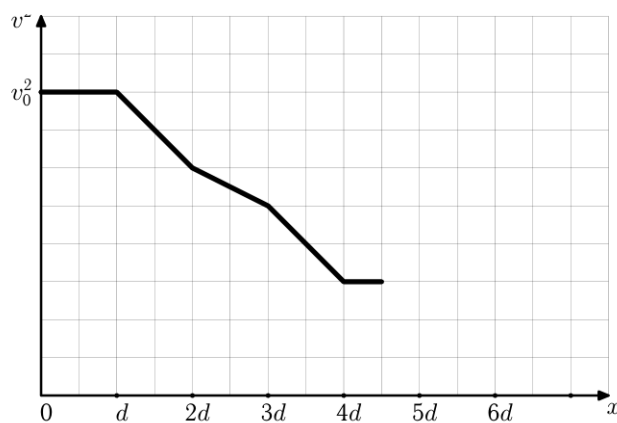
Ответ

Возможная схема электрической цепи, удовлетворяющая всем заявленным требованиям, представлена на рисунке.



5 Электрон между заряженными сетками

Вдоль оси x движется электрон. Перпендикулярно оси x располагаются заряженные металлические сетки, размеры которых много больше расстояния между ними. На рисунке представлен график зависимости квадрата скорости электрона от координаты x . Найдите x -координаты сеток. Считая заряд первой из сеток, через которую пролетел электрон, равным q , найдите заряды остальных сеток. Для электрона, запущенного из начала координат вдоль оси x с вдвое меньшей скоростью $v_0/2$, постройте графики зависимости квадрата скорости от координаты и проекции скорости v_x от времени.



Подсказка

Скорость электрона меняется только на сетках, где излом графика, а поле между сетками однородно. По наклону графика $v^2(x)$ можно сравнить напряжённости полей, а те определяются суммой зарядов сеток.

Ответ

Координаты сеток и их электрические заряды: $x = d, 2d, 3d, 4d$ и заряды $+q, -q/2, +q/2, -q$ соответственно.

При запуске электрона со скоростью $v_0/2$ график зависимости квадрата скорости от координаты представлен на рисунке:

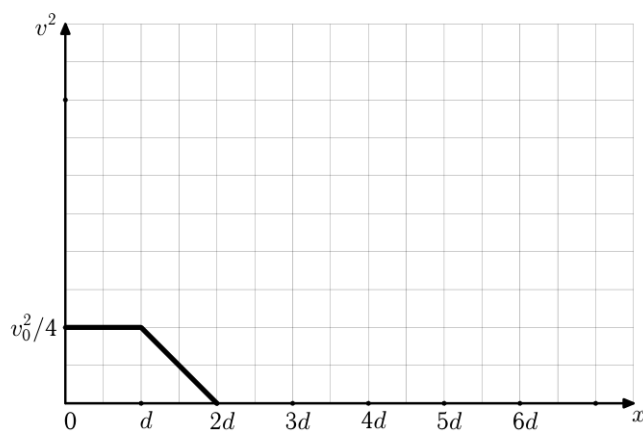
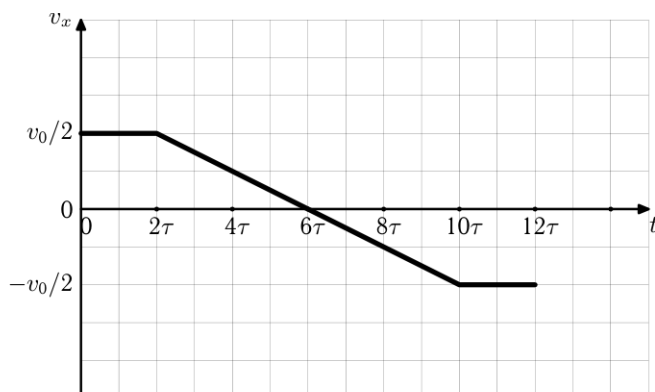


График зависимости проекции скорости v_x от времени t (введено обозначение $\tau = d/v_0$):



6 Тень воздушного шарика на ветру

В солнечную и безоблачную, но ветреную погоду школьник Ярослав запускает непрозрачный воздушный шарик, заполненный гелием. Двигаясь горизонтально со скоростью $u = 2$ м/с, Ярослав обнаружил, что шарик (в системе отсчёта, связанной с Ярославом) поднимается вертикально вверх со скоростью $v = 1$ м/с. Солнечные лучи падают на горизонтальную поверхность под углом 45° к вертикали. С какой скоростью может двигаться по земле тень шарика?

Подсказка

Выразите координаты тени через координаты шарика: при угле 45° смещение тени по горизонтали равно высоте шарика. Направление движения Ярослава по земле может быть любым.

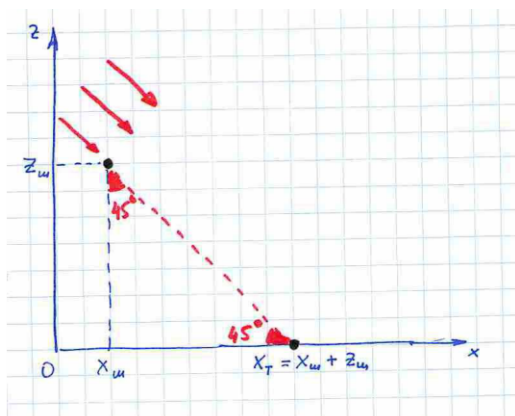
Ответ

Модуль скорости тени может принимать значения в диапазоне от $|u - v| = 1$ м/с до $u + v = 3$ м/с.

Решение

Введём систему координат таким образом, чтобы ось z была направлена вертикально вверх, начало координат было на поверхности земли, а луч света падал в плоскости, проходящей через оси x и z .

Пусть $(x_{\text{ш}}, y_{\text{ш}}, z_{\text{ш}})$ — координаты шарика. Тогда, как вытекает из рисунка, x -координата тени равна $x_{\text{т}} = x_{\text{ш}} + z_{\text{ш}}$. При этом y -координата тени равна $y_{\text{ш}}$.



Из полученных соотношений для координат тени и шарика выразим проекции скорости тени через проекции скорости шарика:

$$v_{\text{т}x} = v_{\text{ш}x} + v_{\text{ш}z}, \quad v_{\text{т}y} = v_{\text{ш}y}.$$

Запишем выражения для проекций скорости на основе условий задачи. Если Ярослав движется по поверхности земли под углом α к оси x , его проекции скорости составляют ($v_{\text{Я}x} = u \cos \alpha$; $v_{\text{Я}y} = u \sin \alpha$). Поскольку шарик движется относительно Ярослава по вертикали со скоростью v , проекции скорости шарика составляют ($v_{\text{ш}x} = u \cos \alpha$; $v_{\text{ш}y} = u \sin \alpha$; $v_{\text{ш}z} = v$). Проекции скорости тени оказываются равны

$$(v_{\text{т}x} = u \cos \alpha + v; \quad v_{\text{т}y} = u \sin \alpha).$$

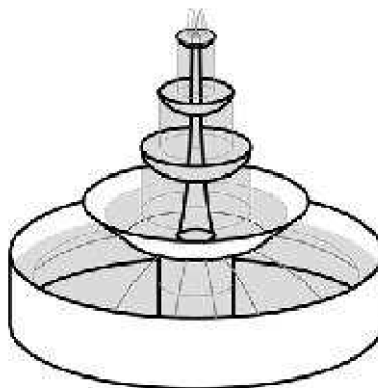
Найдём квадрат скорости тени:

$$v_{\text{т}}^2 = (u \cos \alpha + v)^2 + (u \sin \alpha)^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos \alpha.$$

Он минимален при $\cos \alpha = -1$ и максимален при $\cos \alpha = 1$, пробегая значения в диапазоне от $(u - v)^2$ до $(u + v)^2$. Следовательно, модуль скорости тени может пробегать значения в диапазоне от $|u - v| = 1$ м/с до $u + v = 3$ м/с.

7 Фонтан из нескольких чаш

В фонтан, изображённый на рисунке, по центральной трубке площадью поперечного сечения $S = 50 \text{ см}^2$ подаётся вода, которая вертикально бьёт из отверстия, расположенного на уровне воды верхнего сосуда, на высоту $h = 20 \text{ см}$. Три верхних сосуда полностью заполнены водой, которая стекает из одного в другой, переливаясь через края сосудов. Четвёртый сосуд (считая сверху) — это широкая чаша. Чтобы поддерживать в ней почти постоянный уровень воды в течение длительного времени, по периметру чаши у её дна каждые $\tau = 2 \text{ мин}$ на некоторый промежуток времени открываются горизонтальные трубки общей площадью $S_0 = 900 \text{ см}^2$. Из этих трубок вода бьёт на расстояние $L = 50 \text{ см}$, считая по горизонтали, и попадает в пятый сосуд, где с помощью сливных каналов поддерживается постоянный уровень воды. Каждый следующий уровень воды расположен ниже предыдущего на $H = 45 \text{ см}$ (расстояния измеряются между поверхностями воды). Какую скорость имеет вода при попадании в третий сосуд? На какой промежуток времени открываются горизонтальные трубки через каждые 2 минуты? Сопротивлением воздуха и вязкостью воды можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Подсказка

За два минуты в фонтан уходит столько воды, сколько вытекает из горизонтальных трубок за время их открытия. Скорость вытекания из трубок найдите по дальности полёта струи.

Ответ

Скорость воды при попадании в третий сосуд $\sqrt{2gH} = 3 \text{ м/с}$; горизонтальные трубки надо открыть на время $t_1 = \frac{2S\sqrt{hH}}{S_0L} \tau = 8 \text{ с}$.

Решение

Начиная падение из второго сосуда в третий, вода имеет практически нулевую скорость. Следовательно, движение воды можно рассматривать как свободное падение с высоты H без начальной скорости — в конце такого падения тело приобретает скорость $\sqrt{2gH}$. Это и будет скорость воды при попадании в третий сосуд.

Чтобы струя воды была вверх на высоту h , её скорость на уровне отверстия должна быть равна $\sqrt{2gh}$. Следовательно, за время τ в фонтан попадёт объём воды, равный $S\sqrt{2gh}\tau$.

Пусть горизонтальные трубки открыты. Время движения струи воды без начальной вертикальной скорости с высоты H составляет $\sqrt{2H/g}$. За это время по горизонтали проходит расстояние L . Поскольку горизонтальная скорость при движении в поле тяжести постоянна, она равна

$L/\sqrt{2H/g}$. Именно с этой скоростью вода вытекает из горизонтальных трубок. Поэтому объём воды, вытекающий в единицу времени из трубок, составляет $S_0 \cdot L/\sqrt{2H/g}$.

Чтобы из трубок вытек объём $S\sqrt{2gh}\tau$, попавший в фонтан, трубки надо открыть на время

$$t_1 = S\sqrt{2gh}\tau : \left(S_0 \cdot \frac{L}{\sqrt{2H/g}} \right) = \frac{2S\sqrt{hH}}{S_0 L} \tau = 8 \text{ с.}$$

8 Смешивание воды в стакане

Школьница Алиса проводит опыты с двумя одинаковыми стаканами. Первый стакан Алиса заполнила водой комнатной температуры $t_0 = 20^\circ\text{C}$ до половины объёма, а затем долила столько же воды с температурой $t_1 = 30^\circ\text{C}$. Алиса была уверена, что установившаяся температура будет равна 25°C ; однако она оказалась равной $t_2 = 23^\circ\text{C}$. Как могла рассуждать Алиса и почему конечная температура оказалась другой? Какая температура t_3 установится во втором стакане, если Алиса заполнит его сначала водой комнатной температуры на одну треть и затем дополнит доверху водой температуры $t_1 = 30^\circ\text{C}$? Потерями тепла в окружающее пространство за время установления температуры можно пренебречь.

Подсказка

Подумайте, что ещё, кроме воды, нагревается в опыте. Из первого опыта найдите теплоёмкость стакана, выраженную через теплоёмкость полного стакана воды.

Ответ

Конечная температура в опыте со вторым стаканом составляет $t_3 = 24^\circ\text{C}$.

Решение

Пусть m — масса воды в полном стакане, c — удельная теплоёмкость воды, C — теплоёмкость стакана (произведение массы стакана на удельную теплоёмкость материала, из которого изготовлен стакан).

Алиса могла предположить, что теплоёмкостью стакана можно пренебречь. Она могла рассчитать конечную температуру t следующим образом. Вода, налитая в стакан изначально, получила количество теплоты $\frac{cm}{2}(t - t_0)$; вода, налитая дополнительно, отдала количество теплоты $\frac{cm}{2}(t_1 - t)$. Поскольку количества теплоты одинаковы, $\frac{cm}{2}(t - t_0) = \frac{cm}{2}(t_1 - t)$ и $t = (t_0 + t_1)/2 = 25^\circ\text{C}$.

Установившаяся температура могла оказаться другой из-за того, что стакан имеет конечную теплоёмкость. В этом случае стакан и вода, налитая изначально, получают количество теплоты $(C + \frac{cm}{2})(t_2 - t_0)$, а вода, налитая дополнительно, отдаёт количество теплоты $\frac{cm}{2}(t_1 - t_2)$. Приравняв количества теплоты, составим уравнение

$$\left(C + \frac{cm}{2} \right) (t_2 - t_0) = \frac{cm}{2} (t_1 - t_2),$$

на основе которого можно найти отношение теплоёмкости стакана к теплоёмкости воды: $(C + \frac{cm}{2}) \cdot$

$$3 = \frac{cm}{2} \cdot 7 \text{ и } C = \frac{2cm}{3}.$$

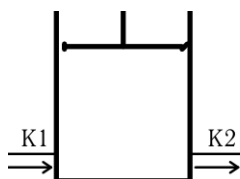
Во втором опыте стакан и вода, налитая изначально, получают количество теплоты $(C + \frac{cm}{3})(t_3 - t_0)$, а вода, налитая дополнительно, отдаёт количество теплоты $\frac{2cm}{3}(t_1 - t_3)$. Приравняв количества теплоты, составим уравнение

$$\left(C + \frac{cm}{3} \right) (t_3 - t_0) = \frac{2cm}{3} (t_1 - t_3).$$

Подставляя найденное выше значение теплоёмкости стакана, приведём соотношение к виду $3(t_3 - t_0) = 2(t_1 - t_3)$. Отсюда $t_3 = 24^\circ\text{C}$.

9 Цилиндр с клапанами

В цилиндре с поршнем, где находится воздух, имеются два клапана: впускной К1 и выпускной К2. Система клапанов работает таким образом, что давление в цилиндре поддерживается в промежутке от $0,8p_0$ до $1,4p_0$, где $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$ Па — атмосферное давление: как только давление в цилиндре падает ниже $0,8p_0$, открывается впускной клапан, и давление становится равным $0,8p_0$; при превышении давлением значения $1,4p_0$ открывается выпускной клапан, и давление падает до $1,4p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания, в процессе которых объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$, где $V_0 = 22,4$ л. Постройте график зависимости давления воздуха в цилиндре от его объёма в данном процессе. Объясните Ваше построение. Считайте, что с момента начала опыта уже прошло несколько колебаний. Определите наименьшее и наибольшее число молей воздуха в цилиндре. Температура постоянна и равна $T_0 = 273$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).



Подсказка

При закрытых клапанах давление меняется по закону Бойля — Мариотта. Определите, какое давление должно быть в крайних точках V_0 и $2V_0$, и в каких точках клапаны открываются. Число молей определяется произведением pV .

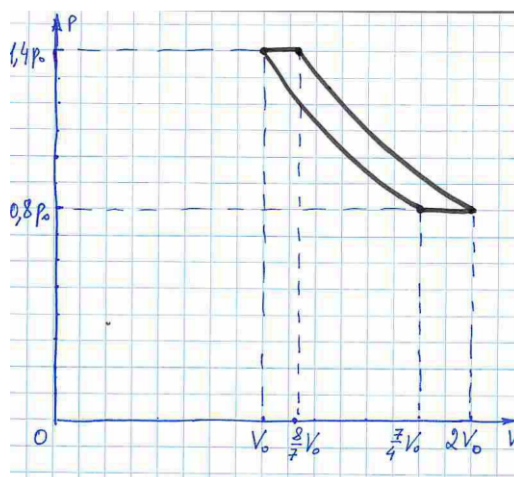
Ответ

Количество вещества в цилиндре принимает значения от 1,4 моль до 1,6 моль; зависимость давления от объёма приведена на графике (см. решение).

Решение

При первом прохождении состояния с объёмом V_0 давление может принимать значение в промежутке от $0,8p_0$ до $1,4p_0$. Если бы клапаны не открывались, при увеличении объёма до $2V_0$ давление по закону Бойля — Мариотта упало бы до значения от $0,4p_0$ до $0,7p_0$ — клапан бы всё равно открылся. Таким образом, давление при увеличении объёма до $2V_0$ оказывается равным $0,8p_0$.

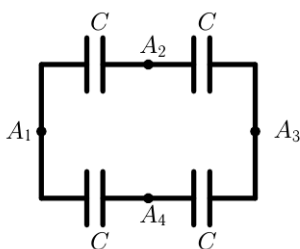
При сжатии давление сначала возрастает обратно пропорционально объёму (по закону Бойля — Мариотта), а затем, по достижении значения $1,4p_0$ (объём при этом равен $2V_0 \cdot 0,8p_0 : (1,4p_0) = 8V_0/7$), открывается клапан, препятствующий дальнейшему увеличению давления. В состоянии с объёмом V_0 давление окажется равным $1,4p_0$. При расширении давление сначала будет убывать обратно пропорционально объёму, затем, по достижении значения $0,8p_0$ (при объёме $V_0 \cdot 1,4p_0 : (0,8p_0) = 7V_0/4$), откроется клапан, и давление далее будет равно $0,8p_0$. Далее цикл будет повторяться. График процесса после хотя бы одного колебания изображён на рисунке.



Количество вещества ν связано с давлением p и объёмом V соотношением $pV = \nu RT_0$. Произведение давления на объём пробегает значения в промежутке от $1,4p_0V_0$ до $1,6p_0V_0$. Следовательно, количество вещества ν принимает значения в промежутке от $1,4\nu_0$ до $1,6\nu_0$, где $\nu_0 = p_0V_0/(RT_0) = 1$ моль.

10 Цепь из четырёх конденсаторов

На рисунке изображена схема электрической цепи, составленной из четырёх первоначально незаряженных конденсаторов ёмкости C . Сначала к точкам A_1 и A_3 подключили батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r . Когда ток через батарейку стал пренебрежимо малым, батарейку отключили, а к точкам A_1 и A_2 подключили резистор R , который также отключили, когда ток через него стал пренебрежимо мал. Найдите электрические заряды на каждой из пластин конденсаторов (а) после отключения батарейки; (б) после отключения резистора. Каким был максимальный электрический ток через резистор в данном процессе? Какое количество теплоты выделилось на резисторе? Получите ответы в виде общих формул и в частном случае $\mathcal{E} = 6$ В, $r = 1$ Ом, $C = 1$ мФ, $R = 1$ кОм.



Подсказка

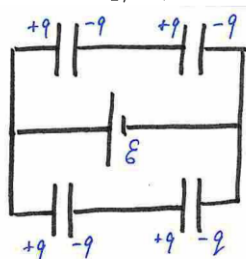
В конце зарядки по симметрии на каждом конденсаторе напряжение $\mathcal{E}/2$. После подключения резистора напряжение на конденсаторе между A_1 и A_2 обратится в нуль; используйте равенство напряжений между A_1 и A_3 по двум ветвям и сохранение заряда на изолированных пластинах.

Ответ

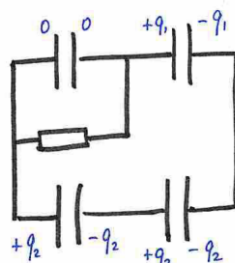
Заряды на обкладках конденсаторов на различных этапах приведены на рисунках в решении, причём $q = C\varepsilon/2 = 3$ мКл, $q_1 = 4q/3 = 4$ мКл, $q_2 = 2q/3 = 2$ мКл; максимальная сила тока через резистор $I_{\max} = \varepsilon/(2R) = 3$ мА; на резисторе выделяется количество теплоты $C\varepsilon^2/6 = 6$ мДж.

Решение

(а) Когда ток через батарейку становится пренебрежимо малым, на пластинах конденсаторов в силу симметрии схемы устанавливаются заряды $\pm q$, как показано на рисунке. Поскольку ЭДС батарейки ε равна сумме напряжений на двух конденсаторах (каждое из напряжений q/C), имеем $\varepsilon = 2q/C$ и $q = C\varepsilon/2$.



(б) Отметим на рисунке заряды на конденсаторах, когда ток через резистор становится пренебрежимо малым. Заряд конденсатора, подключённого к точкам A_2 и A_3 , обозначим через q_1 , заряды двух конденсаторов, подключённых к точке A_4 — через q_2 . Учтём, что напряжение и заряд на конденсаторе, подключённом к точкам A_1 и A_2 , обращаются в нуль.



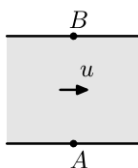
Разность потенциалов между точками A_1 и A_3 равна, с одной стороны, q_1/C , а с другой стороны $2q_2/C$. Следовательно, $q_1 = 2q_2$. Общий заряд на пластинах, подключённых к точке A_3 , должен сохраняться, поэтому $q_1 + q_2 = 2q$. Из двух полученных соотношений для зарядов находим $q_1 = 4q/3 = 2C\varepsilon/3$, $q_2 = 2q/3 = C\varepsilon/3$.

(в) Поскольку заряд на конденсаторе, подключённом к резистору, всё время уменьшался, максимальная сила тока через резистор наблюдалась в момент подключения резистора и была равна отношению напряжения на конденсаторе $q/C = \varepsilon/2$ к сопротивлению резистора R : $I_{\max} = \varepsilon/(2R)$.

(г) Энергия конденсаторов до подключения резистора равна $4 \cdot C(\varepsilon/2)^2/2 = C\varepsilon^2/2$, а после подключения — равна $C(2\varepsilon/3)^2/2 + 2C(\varepsilon/3)^2/2 = C\varepsilon^2/3$. Следовательно, на резисторе выделится количество теплоты $C\varepsilon^2/2 - C\varepsilon^2/3 = C\varepsilon^2/6$.

11 Переправа через реку с наименьшим сносом

Школьник Вася, находящийся в точке А, собирается переплыть на противоположный берег реки и оказаться как можно ближе к точке В, расположенной точно напротив точки А. Ширина реки равна L , скорость течения реки равна u , скорость Васи в стоячей воде равна v . Определите, на каком минимальном расстоянии от точки В может оказаться Вася после переправы. Объясните Ваш ответ. Изобразите на рисунке векторы скорости течения реки, скорости Васи в стоячей воде и скорости Васи относительно берега при оптимальном способе переправы. Решите задачу в общем случае и в частных случаях (а) $u = 0,8$ м/с, $v = 1$ м/с, $L = 100$ м; (б) $u = 1$ м/с, $v = 0,8$ м/с, $L = 100$ м.



Подсказка

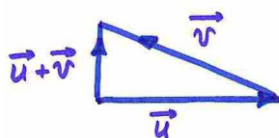
Скорость Васи относительно воды имеет заданную длину, но любое направление: её конец лежит на окружности. Какая касательная к этой окружности даёт наименьший снос?

Ответ

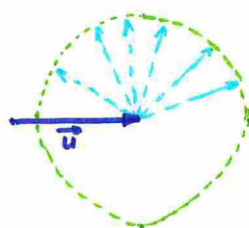
При $v > u$ (в том числе в случае (а)) искомое минимальное расстояние равно нулю. При $v < u$ (в том числе в случае (б)) Вася может оказаться от точки В на минимальном расстоянии $x = L\sqrt{u^2 - v^2}/v$. В случае (б) $x = 75$ м.

Решение

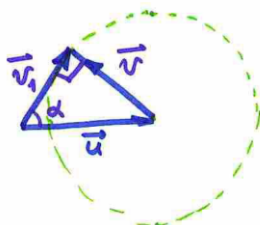
Если скорость Васи больше скорости течения реки (в частности, в случае (а)), он может попасть в точку В. Векторы скоростей течения реки $\vec{u}$, Васи относительно воды $\vec{v}$ и Васи относительно берега $\vec{u} + \vec{v}$ приведены на рисунке:



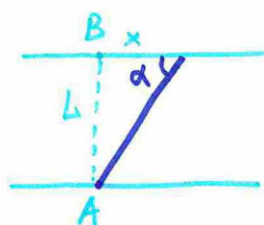
Пусть скорость Васи меньше скорости течения реки. Изобразим на рисунке вектор скорости течения реки $\vec{u}$. Вектор скорости Васи $\vec{v}$ относительно воды имеет фиксированную величину, но его направление может быть любым. Возможные варианты расположения вектора $\vec{v}$ изображены пунктиром на рисунке. Конец данного вектора лежит на окружности:



Смещение Васи относительно точки В окажется минимальным, если угол α между скоростью Васи относительно берега $\vec{v}_1 = \vec{u} + \vec{v}$ и направлением к точке В окажется как можно ближе к 90° ; при этом вектор $\vec{v}_1$, направленный по касательной к окружности, окажется перпендикулярен вектору $\vec{v}$, направленному вдоль радиуса окружности:



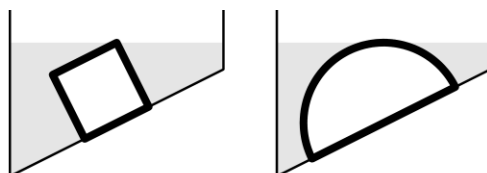
Учитывая, что по теореме Пифагора $|\vec{v}_1| = \sqrt{u^2 - v^2}$, имеем $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{u^2 - v^2}/v$. При переправе Вася сместится относительно точки В на расстояние $x = L \operatorname{ctg} \alpha = L\sqrt{u^2 - v^2}/v$:



В случае (б) смещение Васи относительно точки В равно $x = 75$ м.

12 Давление воды на кубик и полусферу

Школьница Ирина проводит опыты с сосудами с наклонным дном. На дне первого сосуда — кубик, на дне второго сосуда — полусфера. Уровень воды в каждом сосуде точно совпадает с положением наивысшей точки кубика или полусферы. Оказалось, что сила давления, действующая со стороны воды как на кубик, так и на полусферу (без учёта атмосферного давления), направлена горизонтально. Под каким углом к горизонту наклонено дно первого сосуда? Второго сосуда? Вода под кубик и полусферу не подтекает.



Подсказка

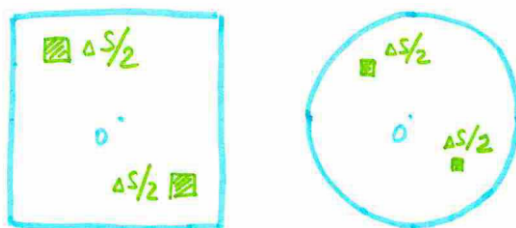
Представьте, что под тело подтекла вода: тогда сила давления на тело вместе с силой давления на его основание дадут силу Архимеда. Если сила давления горизонтальна, вертикальная составляющая силы на основание равна силе Архимеда.

Ответ

Дно первого сосуда наклонено под углом, тангенс которого равен $1/2$. Дно второго сосуда наклонено под углом, косинус которого равен $2/3$ (тангенс $\sqrt{5}/2 \approx 1,12$).

Решение

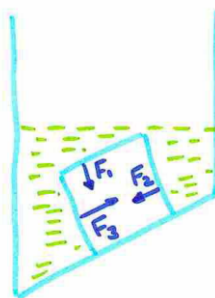
Пусть ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения. Получим сначала формулу для силы давления жидкости на плоскую фигуру (квадрат или круг) площадью S , имеющую центр симметрии O на глубине H и наклонённую под углом к горизонту. Выделим два маленьких участка площадью $\Delta S/2$ каждый, симметричные относительно точки O : один — на глубине $H + y$, другой — на глубине $H - y$:



На эти участки действуют силы давления $\rho g(H + y)\Delta S/2$ и $\rho g(H - y)\Delta S/2$ — в сумме $\rho gH\Delta S$. Учитывая вклад от всех участков, находим, что сила давления на рассматриваемую плоскую фигуру составляет ρgHS .

Изложим теперь два способа решения задачи о кубике. Пусть a — длина ребра куба, тогда площадь грани куба составляет a^2 . Обозначим через α угол наклона дна сосуда к горизонту. В плоскости рисунка направим ось x горизонтально, ось y — вертикально вверх.

Задача о кубике. Первый способ. Изобразим на рисунке силы давления, действующие на грани кубика. Силы, действующие на грани, параллельные плоскости рисунка, компенсируются — их можно не учитывать.

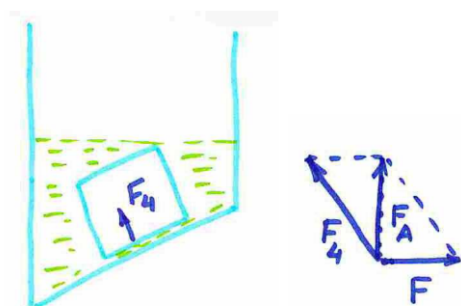


Учитывая, что центр верхней грани находится на глубине $\frac{a}{2} \sin \alpha$, запишем $F_1 = \rho g \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha \cdot a^2$. Аналогично $F_2 = \rho g \cdot \frac{a}{2} \cos \alpha \cdot a^2$ и $F_3 = \rho g (a \sin \alpha + \frac{a}{2} \cos \alpha) a^2$. Сумма проекций этих сил на ось y равна

$$F_y = (F_3 - F_2) \sin \alpha - F_1 \cos \alpha = \rho g \cdot a \sin \alpha \cdot a^2 \cdot \sin \alpha - \rho g \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha \cdot a^2 \cdot \cos \alpha.$$

Эта сумма обращается в нуль при $\sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha$ и $\tan \alpha = 1/2$.

Задача о кубике. Второй способ. Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая сил давления, действующих на кубик. Если под дно кубика будет подтекать вода, то сила $\vec{F}$ вместе с силой $\vec{F}_4$, действующей на дно кубика, будут образовывать силу Архимеда $\vec{F}_A$: $\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_4$.

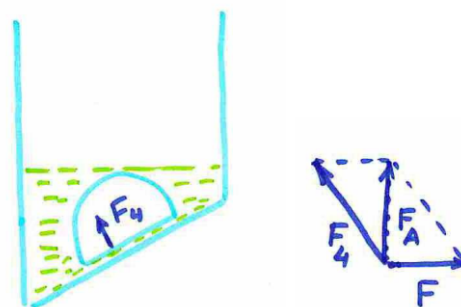


Учитывая, что центр нижней грани находится на глубине $a \cos \alpha + \frac{a}{2} \sin \alpha$, получим $F_4 = \rho g \left(a \cos \alpha + \frac{a}{2} \sin \alpha \right)$. Горизонтальность силы $\vec{F}$ означает, что $F_4 \cos \alpha = F_A$, или

$$\rho g \left(a \cos \alpha + \frac{a}{2} \sin \alpha \right) a^2 \cos \alpha = \rho g a^3.$$

Преобразуя данное соотношение, находим $(\cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha) \cos \alpha = 1$, или $\operatorname{tg} \alpha = 1/2$.

Задача о полусфере. Пусть R — радиус полусферы, β — угол наклона дна сосуда к горизонту. Задачу о полусфере удобнее решать способом, аналогичным второму способу решения задачи о кубике. Пусть $\vec{F}$ — равнодействующая сил давления, действующих на полусферу. Представим, что под дно полусферы подтекает вода; тогда сила $\vec{F}$ вместе с силой $\vec{F}_4$, действующей на дно полусферы, будут образовывать силу Архимеда $\vec{F}_A$: $\vec{F}_A = \vec{F} + \vec{F}_4$.



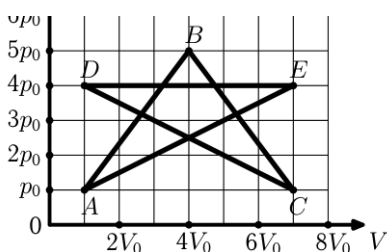
Учитывая, что центр дна полусферы находится на глубине R , а площадь дна полусферы πR^2 , получим $F_4 = \rho g R \cdot \pi R^2$. Горизонтальность силы $\vec{F}$ означает, что $F_4 \cos \beta = F_A$, или

$$\rho g R \cdot \pi R^2 \cos \beta = \rho g \cdot \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Преобразуя данное соотношение, находим $\cos \beta = \frac{2}{3}$, или $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx 1,12$.

13 Цикл-звезда на pV -диаграмме

Над идеальным газом совершают циклический процесс, который на pV -диаграмме изображается в виде звезды, соединяющей точки $A(p_0; V_0)$, $B(5p_0; 4V_0)$, $C(p_0; 7V_0)$, $D(4p_0; V_0)$, $E(4p_0; 7V_0)$ и $A(p_0; V_0)$. Как выразить работу A , совершённую газом за цикл, через площади образовавшихся на рисунке треугольников и пятиугольника? Выразите эту работу через параметры p_0 и V_0 . Рассчитайте численное значение работы, если минимальная температура газа равна $T_0 = 100$ К, а количество вещества составляет $\nu = 1$ моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).



Подсказка

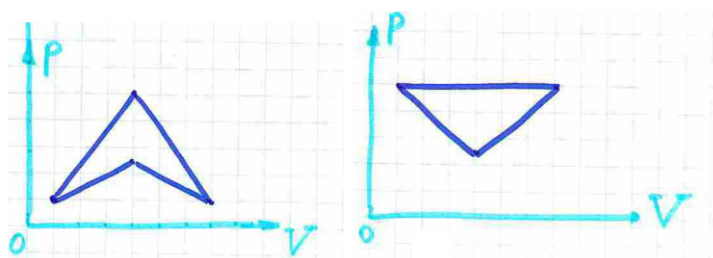
Работа за цикл равна площади, ограниченной циклом, со знаком по направлению обхода. Звезду можно разложить на два простых замкнутых цикла. Работу проще посчитать по участкам как площади трапеций под графиком.

Ответ

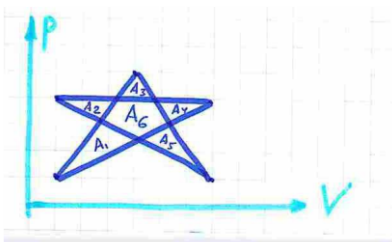
Работа газа равна сумме площадей треугольников и удвоенной площади пятиугольника. Она равна $A = 12\nu RT_0 = 10$ кДж.

Решение

Представленный на рисунке цикл можно представить как совокупность двух циклов:



Работа в каждом из этих циклов равна площади фигуры, ограниченной циклом. При сложении работ получаем, что площади треугольников надо учитывать с коэффициентом 1, а площадь пятиугольника — с коэффициентом 2: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + 2A_6$.

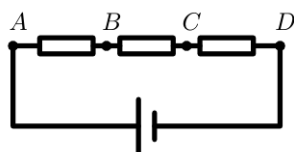


Однако рассчитывать работу удобнее, складывая работы на отдельных участках AB , BC , CD , DE , EA . На каждом из участков работа газа равна площади трапеции под графиком. По формуле для площади трапеции получим $A_{AB} = A_{BC} = 9p_0V_0$, $A_{CD} = A_{EA} = -15p_0V_0$, $A_{DE} = 24p_0V_0$. Складывая работы, находим $A = 12p_0V_0$.

Поскольку как давление, так и объём минимальны в точке A , температура газа, пропорциональная произведению давления на объём, также минимальна в этой точке. Согласно уравнению идеального газа, $p_0V_0 = \nu RT_0$. Отсюда $A = 12\nu RT_0 = 10$ кДж.

14 Вольтметр с конечным сопротивлением

Школьник Станислав проводит опыты с электрической цепью, состоящей из трёх одинаковых резисторов и батарейки. Подключив вольтметр к клеммам А и В, Станислав записал показания прибора $U_{AB} = 4$ В. Станислав был уверен, что показание вольтметра при подключении к клеммам А и С составит 8 В, а при подключении к клеммам А и D будет равно 12 В. Действительно, одно из показаний прибора совпало с предсказаниями Станислава: $U_{AD} = 12$ В. Однако второе показание оказалось неожиданным: $U_{AC} = 7$ В. Как мог рассуждать Станислав? Почему одно из показаний прибора было предсказано неправильно? Какую информацию о характеристиках приборов можно получить на основе проведённых измерений? Считайте, что сила тока через вольтметр пропорциональна напряжению на нём.



Подсказка

Предсказание Станислава верно для идеальных приборов. Учтите внутреннее сопротивление батарейки r и конечное сопротивление вольтметра R_V , а затем используйте отношение показаний $4 : 7 : 12$.

Ответ

ЭДС батарейки составляет 28 В; внутреннее сопротивление батарейки, сопротивление резистора и сопротивление вольтметра равны.

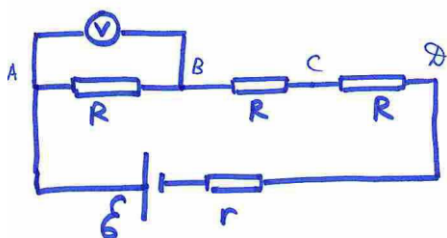
Решение

Пусть $\mathcal{E}$ — ЭДС батарейки.

Станислав мог считать батарейку и вольтметр идеальными. Поскольку сопротивления резисторов и силы тока через них одинаковые, напряжения на резисторах также равны между собой. Поскольку их сумма равна $\mathcal{E}$, каждое из напряжений равно $\mathcal{E}/3$. Следовательно, $U_{AB} = \mathcal{E}/3$, $U_{AC} = 2\mathcal{E}/3$, $U_{AD} = \mathcal{E}$. При $U_{AB} = 4$ В получим $U_{AC} = 8$ В, $U_{AD} = 12$ В.

Однако батарейка и вольтметр вполне могут и не быть идеальными. Пусть R — сопротивление каждого из резисторов, r — внутреннее сопротивление батарейки, R_V — сопротивление вольтметра. Найдём показания вольтметра при подключении к разным клеммам схемы.

Пусть вольтметр подключён к клеммам А и В. Изобразим схему электрической цепи, заменив неидеальную батарейку на последовательно соединённые идеальную батарейку и сопротивление:



Сила тока через вольтметр равна U_{AB}/R_V ; сила тока через резистор, параллельный вольтметру, равна U_{AB}/R ; следовательно, сила тока через батарейку равна

$$I = \frac{U_{AB}}{R_V} + \frac{U_{AB}}{R}.$$

Напряжение между точками В и Е составляет, с одной стороны, $I(2R + r)$, а с другой стороны, $\mathcal{E} - U_{AB}$. Отсюда $I = \frac{\mathcal{E} - U_{AB}}{2R + r}$. Из двух соотношений для I получим

$$\frac{U_{AB}}{R_V} + \frac{U_{AB}}{R} = \frac{\mathcal{E} - U_{AB}}{2R + r}.$$

Отсюда

$$\frac{\mathcal{E}}{U_{AB}} = (2R + r) \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) + 1.$$

Аналогично получим

$$\frac{\mathcal{E}}{U_{AC}} = (R + r) \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R} \right) + 1; \quad \frac{\mathcal{E}}{U_{AD}} = r \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{3R} \right) + 1.$$

Для анализа этой системы удобно учесть пропорцию $U_{AB} : U_{AC} : U_{AD} = 4 : 7 : 12$. В частности, из свойства $\mathcal{E}/U_{AB} = 3\mathcal{E}/U_{AD}$ получим

$$(2R + r) \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) + 1 = 3r \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{3R} \right) + 3,$$

или $R = r$. Также учтём свойство $4\mathcal{E}/U_{AB} = 7\mathcal{E}/U_{AC}$:

$$4 \cdot \left((2R + r) \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) + 1 \right) = 7 \cdot \left((R + r) \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R} \right) + 1 \right).$$

Поскольку $R = r$, преобразуем свойство как

$$4 \cdot \left(3R \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R} \right) + 1 \right) = 7 \cdot \left(2R \left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{2R} \right) + 1 \right).$$

Из него получим $R_V = R$.

Таким образом, данные задачи позволяют сделать вывод, что сопротивления батарейки, резисторов и вольтметра одинаковые (батарейка и вольтметр, таким образом, очень далеки от идеальности). В этом случае $U_{AB} = \mathcal{E}/7$, $U_{AC} = \mathcal{E}/4$, $U_{AD} = 3\mathcal{E}/7$. Из данных задачи получаем $\mathcal{E} = 28$ В.

15 Протон на окружности в Е и В

Протон (заряд $+e$, масса m) движется в электромагнитном поле по окружности радиуса R . В каждой точке траектории электрическое поле направлено к центру окружности и равно E . Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно плоскости окружности и равна B . При каких условиях на параметры задачи протон движется со скоростью, много меньшей скорости света? Какой может быть кинетическая энергия протона? Решите задачу в общем случае и получите численный ответ в двух частных случаях: (а) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0$; (б) $R = 1$ м, $E = 1$ кВ/м, $B = 0,1$ Тл. Ответ представьте в электронвольтах (1 эВ — энергия, получаемая протоном при прохождении разности потенциалов 1 В). Элементарный заряд составляет $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса протона $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Подсказка

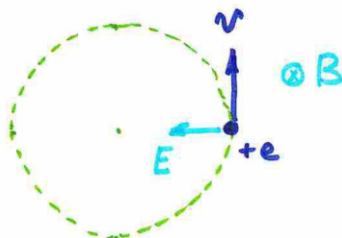
Равнодействующая электрической силы и силы Лоренца направлена к центру и создаёт центростремительное ускорение. Направление обхода может быть любым, поэтому уравнение для скорости квадратное и имеет два корня.

Ответ

Скорость протона много меньше скорости света при условиях $BR \ll mc/e$ и $ER \ll mc^2/e$. Кинетическая энергия протона может быть равна $K = \frac{1}{2}eRE \left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right)$, где $\alpha = eB^2R/(2mE)$. В случае (а) $K = 500$ эВ, в случае (б) $K = 470$ кэВ или $K = 0,53$ эВ.

Решение

Пусть v — скорость движения протона по окружности (если протон движется в направлении, противоположном указанному на рисунке, будем считать скорость отрицательной).



Действующая на протон сила равна $eE + evB$ и направлена к центру окружности. Поскольку ускорение протона равно v^2/R , из второго закона Ньютона получим

$$m \frac{v^2}{R} = e(E + vB).$$

Решая квадратное уравнение, находим возможные значения скорости протона:

$$v = \frac{eBR}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{eBR}{2m} \right)^2 + \frac{eER}{m}}.$$

Эти значения много меньше скорости света при соблюдении двух условий: $BR \ll mc/e$, $ER \ll mc^2/e$. Поскольку $mc^2/e \simeq 10^9$ В, а $ER = 10^3$ В и $BcR = 3 \cdot 10^7$ В, данные условия в задаче выполняются.

Кинетическую энергию протона можно выразить из второго закона Ньютона:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2}eRE \left(1 + \frac{vB}{E} \right).$$

Величину vB/E удобно выразить через параметр $\alpha = \frac{eB^2R}{2mE}$; тогда $\frac{vB}{E} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}$ и

$$K = \frac{1}{2}eRE \left(\alpha + 1 \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right).$$

Проведём подстановку числовых значений. В случае (а) $\alpha = 0$, и кинетическая энергия протона может принимать только одно значение $K = eRE/2$. Чтобы выразить её в электронвольтах, рассчитаем отношение $K/e = RE/2 = 500$ В; отсюда $K = 500$ эВ.

В случае (б) $\alpha \simeq 471$. Кинетическая энергия протона может принимать два значения. Одно из них равно

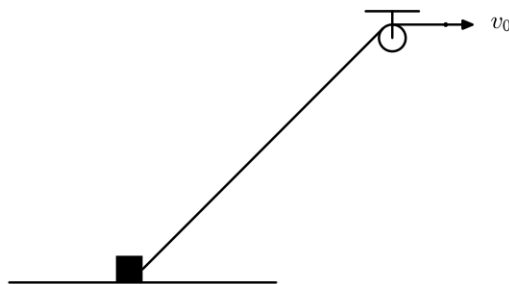
$$K = \frac{1}{2}eRE \left(\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right) \simeq eRE\alpha \simeq 470 \text{ кэВ}.$$

Второе значение энергии равно

$$K = \frac{1}{2}eRE \left(\alpha + 1 - \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha} \right) = \frac{1}{2}eRE \frac{1}{\alpha + 1 + \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha}} \simeq \frac{eRE}{4\alpha} \simeq 0,53 \text{ эВ}.$$

16 Груз на нити через блок

К грузу массой m , находящемуся на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплена невесомая нерастяжимая нить, перекинутая через блок. Школьник Вася вытягивает горизонтальный конец нити с постоянной скоростью v_0 . С какой скоростью движется груз в момент, когда наклонный участок нити составляет угол α с горизонтом? Чему равна сила натяжения нити в этот момент времени? При каких соотношениях параметров задачи груз оторвётся от горизонтальной поверхности? Блок находится на высоте H , размерами блока и груза можно пренебречь. Ускорение свободного падения равно g .



Подсказка

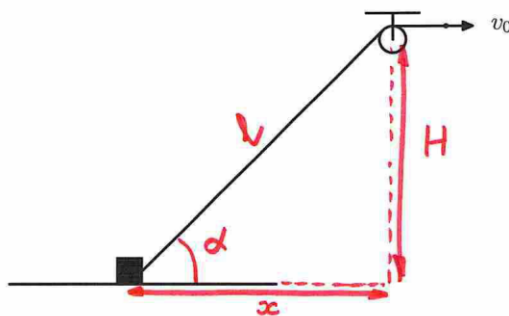
Длина наклонного участка нити уменьшается со скоростью v_0 , а расстояние от груза до блока по горизонтали — со скоростью груза. Свяжите их через теорему Пифагора, затем найдите ускорение груза и запишите второй закон Ньютона.

Ответ

Скорость бруска $u = \frac{v_0}{\cos \alpha}$, сила натяжения нити $T = \frac{mv_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{H \cos \alpha}$; брусок оторвётся от горизонтальной поверхности, когда величина $v_0^2 \operatorname{tg}^4 \alpha / H$ достигнет g .

Решение

Пусть l — длина наклонного участка нити, а x — расстояние от груза до блока по горизонтали:



Запишем теорему Пифагора:

$$l^2 = x^2 + H^2. \quad (1)$$

За малый промежуток времени Δt величина x уменьшается на $u\Delta t$, где u — скорость бруска: $\Delta x = -u\Delta t$. Величина l уменьшается на $v_0\Delta t$: $\Delta l = -v_0\Delta t$. Записывая малые изменения левой и правой частей соотношения (1), получим $\Delta(l^2) = \Delta(x^2)$, или $2l\Delta l = 2x\Delta x$, или

$$l \cdot v_0 = x \cdot u. \quad (2)$$

Отсюда находим скорость движения бруска: $u = \frac{l}{x}v_0 = \frac{v_0}{\cos \alpha}$.

Для нахождения ускорения бруска рассмотрим малые изменения левой и правой частей соотношения (2). Имеем $v_0\Delta l = x\Delta u + u\Delta x$, или $-v_0^2\Delta t = x\Delta u - u^2\Delta t$. Отсюда

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{u^2 - v_0^2}{x} = \frac{v_0^2}{H/\operatorname{tg} \alpha} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{v_0^2}{H} \operatorname{tg}^3 \alpha.$$

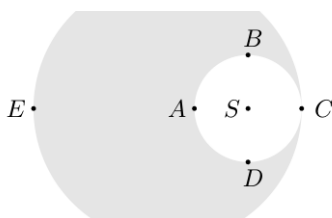
Пусть T — сила натяжения нити, $N \geq 0$ — сила нормального давления, действующая на брусок. Запишем второй закон Ньютона для движения бруска в проекциях на горизонтальное и вертикальное направления:

$$T \cos \alpha = m \frac{\Delta u}{\Delta t} = m \frac{v_0^2}{H} \operatorname{tg}^3 \alpha \quad \text{и} \quad N + T \sin \alpha - mg = 0.$$

Первое равенство даёт $T = \frac{mv_0^2 \operatorname{tg}^3 \alpha}{H \cos \alpha}$, из второго соотношения с учётом $N \geq 0$ находим $T \sin \alpha \leq mg$ и $\frac{v_0^2 \operatorname{tg}^4 \alpha}{H} \leq g$. Таким образом, когда в процессе движения бруска величина $v_0^2 \operatorname{tg}^4 \alpha / H$ станет равной g , брусок оторвётся от горизонтальной поверхности.

17 Астероид со сферической полостью

Космонавты, высадившиеся на астероид радиусом $R = 5$ км, обнаружили внутри астероида сферическую полость радиусом $r = 2$ км. Оказалось, что в центре S полости ускорение свободного падения составляет $g_S = 0,2$ см/с². Определите плотность астероида, считая её постоянной. Изобразите на рисунке векторы ускорения свободного падения в точках А, В, С, D, E. Определите модули ускорения свободного падения в этих точках. Гравитационная постоянная $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг².



Подсказка

Заполните полость мысленно веществом той же плотности и вычтите его вклад. Поле внутри однородного шара линейно растёт от центра, и полость даёт вклад, одинаковый по всей полости.

Ответ

Плотность астероида $\rho = \frac{g_S}{\frac{4}{3}\pi G(R-r)} \simeq 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$; вектор ускорения свободного падения в точках А, В, С, D равен вектору ускорения в точке S; в точке E ускорение свободного падения направлено к центру астероида и равно по величине $g_S \frac{1}{R-r} \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2} \right) = 0,32 \text{ см/с}^2$. Сами векторы изображены на рисунке в решении.

Решение

1. Заполним мысленно полость веществом плотностью, равной плотности астероида ρ . Это дополнительное вещество не окажет никакого влияния на ускорение свободного падения в точке S: однородная сфера создаёт в центре ускорение свободного падения, равное нулю. Таким образом, g_S совпадает с ускорением свободного падения на глубине r внутри однородного астероида радиуса R . На тело массой m , помещённое в эту точку, действует сила тяготения со стороны внутренних слоёв астероида:

$$F = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-r)^3 \cdot \frac{m}{(R-r)^2} = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi(R-r)m.$$

Следовательно,

$$g_S = \frac{4}{3}\pi G\rho(R-r). \quad (1)$$

Отметим, что в векторном виде можно записать

$$\vec{g}_S = -\frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \vec{OS}. \quad (2)$$

Плотность астероида оказывается, таким образом, равна

$$\rho = \frac{g_S}{\frac{4}{3}\pi G(R-r)} \simeq 2,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

2. Пусть K — другая точка внутри рассматриваемой полости. Исследуем вектор ускорения свободного падения $\vec{g}$ в этой точке. Разместим в этой точке тело массой m . Если мысленно заполнить полость веществом плотностью ρ , на тело, аналогично (3), будет действовать сила тяготения $\vec{F}_1 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \vec{OK}$. При этом сила тяготения со стороны вещества, которым мысленно заполнена полость, равна $\vec{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \vec{SK}$. Следовательно, до заполнения полости сила тяготения была равна

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot (\vec{OK} - \vec{SK}) = -\frac{4}{3}\pi G\rho m \cdot \vec{OS}.$$

Поэтому во всех точках внутри полости (в том числе в точках А, В, С, D) вектор ускорения свободного падения оказывается равен $\vec{g} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \cdot \vec{OS}$, то есть $\vec{g}_S$.

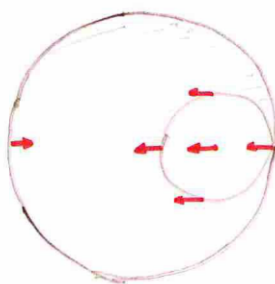
3. В точке E модули сил F_1 и F_2 (см. предыдущий пункт), направленных к центру астероида, равны

$$F_1 = \frac{4}{3}\pi G\rho m R; \quad F_2 = G\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \frac{m}{(R+r)^2}.$$

Следовательно, до заполнения полости сила тяготения была равна $F_1 - F_2 = \frac{4}{3}\pi G\rho m \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2} \right)$. Поэтому ускорение свободного падения в точке E равно

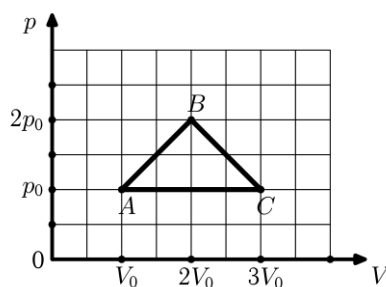
$$g_E = \frac{4}{3}\pi G\rho \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2} \right) = g_S \frac{1}{R-r} \left(R - \frac{r^3}{(R+r)^2} \right) = 0,32 \text{ см/с}^2.$$

Сами векторы ускорения свободного падения изображены на рисунке:



18 Треугольный цикл одноатомного газа

Над идеальным одноатомным газом совершается циклический процесс $ABCA$, изображённый на pV -диаграмме в виде треугольника с вершинами $A(p_0; V_0)$, $B(2p_0; 2V_0)$, $C(p_0; 3V_0)$. Определите, на каких участках цикла происходит теплообмен с нагревателями, на каких — с холодильниками. Чему равно количество теплоты, полученное газом от нагревателя? А отданное холодильнику?



Подсказка

На участках AB и CA знак теплоты ясен по знакам работы и изменения внутренней энергии. На участке BC работа положительна, а внутренняя энергия убывает — найдите точку, где теплота меняет знак, рассматривая малое приращение объёма.

Ответ

На участке ABK происходит теплообмен с нагревателем, на участке KCA — с холодильником (K — середина отрезка BC). Количество теплоты, полученное от нагревателя и отданное холодильнику: $Q_+ = 6,5 p_0 V_0$, $Q_- = 5,5 p_0 V_0$.

Решение

На участке AB совершаемая газом работа и изменение внутренней энергии газа положительны; следовательно, происходит теплообмен с нагревателем. На участке CA совершаемая газом работа и изменение внутренней энергии газа отрицательны; следовательно, происходит теплообмен с холодильником. Для участка BC надо проводить более детальное исследование: работа положительна, а температура и внутренняя энергия уменьшаются.

Запишем уравнение процесса BC : $p = p_0 \left(4 - \frac{V}{V_0} \right)$. Рассмотрим малый участок процесса, на котором газ расширяется от объёма V до $V + \Delta V$. На данном участке давление изменяется от p до $p + \Delta p$, причём $\Delta p = -\frac{p_0}{V_0} \Delta V$. Получаемое газом на данном малом участке количество

теплоты ΔQ складывается из изменения внутренней энергии $\Delta U = \Delta(1,5pV) = 1,5p\Delta V + 1,5V\Delta p$ и совершаемой газом работы $p\Delta V$: $\Delta Q = 2,5p\Delta V + 1,5V\Delta p$. Учитывая соотношение для Δp и ΔV , получим

$$\Delta Q = 2,5p\Delta V - 1,5V\frac{p_0}{V_0}\Delta V = 2,5p_0\left(4 - \frac{V}{V_0}\right)\Delta V - 1,5V\frac{p_0}{V_0}\Delta V = p_0\Delta V\left(10 - \frac{4V}{V_0}\right).$$

Тепловой эффект оказывается положительным при $V < 2,5V_0$ и отрицательным при $V > 2,5V_0$. Таким образом, на участке BK происходит теплообмен с нагревателем, на участке KC — с холодильником (K — середина отрезка BC).

Найдём тепловой эффект на участках ABK и KCA . Разность внутренних энергий в точках K и A составляет

$$U_K - U_A = 1,5(2,5 \cdot 1,5p_0V_0 - p_0V_0) = 16,5 \cdot 0,25p_0V_0.$$

Работа газа на каждом из участков считается как площадь под графиком (следует учесть, что площадь одной клетки равна $0,25p_0V_0$): $A_{ABK} = 9,5 \cdot 0,25p_0V_0$, $A_{KCA} = -5,5 \cdot 0,25p_0V_0$. Следовательно,

$$Q_{ABK} = U_K - U_A + A_{ABK} = 6,5p_0V_0, \quad Q_{KCA} = U_A - U_K + A_{KCA} = -5,5p_0V_0.$$

19 Трансформатор: возможные напряжения

Школьник Владислав проводит опыты с трансформатором и источником питания, который выдаёт переменное напряжение $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$, где $U_0 = 12$ В. Трансформатор имеет две обмотки с двумя выводами у каждой. Число витков первой обмотки N , второй обмотки $3N$. Переменные напряжения с какими амплитудами может получить Владислав с помощью данного оборудования? Для каждого значения амплитуды напряжения нарисуйте соответствующую схему соединений.

Подсказка

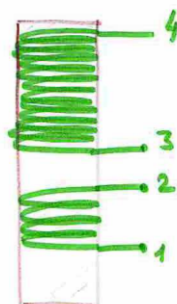
Напряжения на обмотках колеблются в одной фазе, а их амплитуды относятся как числа витков. Источник можно подключать к любой обмотке, а выводы разных обмоток можно соединять между собой двумя способами.

Ответ

Можно получить напряжения с амплитудами колебаний: 0 В, 3 В, 4 В, 6 В, 8 В, 9 В, 12 В, 16 В, 18 В, 24 В, 36 В, 48 В.

Решение

Изобразим трансформатор на рисунке, обозначив выводы первой обмотки (N витков) через 1 и 2, второй обмотки ($3N$ витков) — через 3 и 4.



Пусть магнитный поток через сердечник зависит от времени t по гармоническому закону $\Phi(t) = -\Phi_0 \sin(\omega t)$. В соответствии с законом электромагнитной индукции получим

$$U_{12} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = N \Phi_0 \omega \cos(\omega t); \quad U_{34} = -3N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 3N \Phi_0 \omega \cos(\omega t).$$

Таким образом, напряжения U_{12} и U_{34} совершают колебания в одной фазе, а их амплитуды отличаются в 3 раза: $U_{12} = A \cos(\omega t)$; $U_{34} = 3A \cos(\omega t)$.

Получим теперь различные напряжения. Отметим, что даже без использования трансформатора можно получить напряжение, равное нулю, а также напряжение с амплитудой U_0 .

1. Соединим проводом выводы 2 и 3:



1а. Подключая источник к концам 1 и 2, получим $U_{12} = U_0 \cos(\omega t)$, $U_{24} = U_{34} = 3U_0 \cos(\omega t)$, $U_{14} = 4U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $3U_0$ и $4U_0$.

1б. Подключая источник к концам 3 и 4, получим $U_{12} = \frac{U_0}{3} \cos(\omega t)$, $U_{24} = U_{34} = U_0 \cos(\omega t)$, $U_{14} = \frac{4}{3}U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/3$ и $4U_0/3$.

1в. Подключая источник к концам 1 и 4, получим $U_{12} = \frac{U_0}{4} \cos(\omega t)$, $U_{24} = U_{34} = \frac{3}{4}U_0 \cos(\omega t)$, $U_{14} = U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/4$ и $3U_0/4$.

2. Соединим проводом выводы 2 и 4:



2а. Подключая источник к концам 1 и 2, получим $U_{12} = U_{14} = U_0 \cos(\omega t)$, $U_{34} = 3U_0 \cos(\omega t)$, $U_{13} = -2U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудой колебаний $2U_0$.

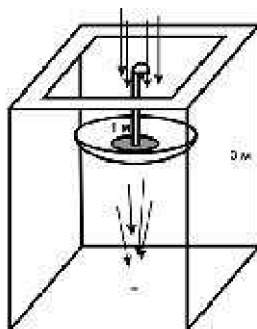
2б. Подключая источник к концам 3 и 4, получим $U_{12} = U_{14} = \frac{1}{3}U_0 \cos(\omega t)$, $U_{34} = U_0 \cos(\omega t)$, $U_{13} = -\frac{2}{3}U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудой колебаний $2U_0/3$.

2в. Подключая источник к концам 1 и 3, получим $U_{12} = U_{14} = -\frac{1}{2}U_0 \cos(\omega t)$, $U_{34} = -\frac{3}{2}U_0 \cos(\omega t)$, $U_{13} = U_0 \cos(\omega t)$. Данная схема даёт дополнительно напряжения с амплитудами колебаний $U_0/2$ и $3U_0/2$.

Учитывая, что $U_0 = 12$ В, получим ответ.

20 Лужица в зонте как линза

В потолке чердака высотой 3 м расположена плоская дверца из прозрачного стекла, на ручке которой висит зонт из прозрачного пластика. В куполе зонта со временем скопилось немного воды. В момент, когда солнечные лучи перпендикулярны поверхности земли, свет, проникающий на чердак сквозь люк, проходя сквозь воду в зонте, собирается в яркую точку на полу. Длина ручки зонта составляет 1 м. Какой высоты покажется потолок в комнате, если в пасмурный день лечь на пол и смотреть вверх сквозь лужицу в зонте?



Подсказка

Параллельные лучи собираются в точке на полу, значит, фокусное расстояние линзы из воды равно расстоянию от зонта до пола. Потолок — предмет на расстоянии длины ручки от линзы; найдите его мнимое изображение.

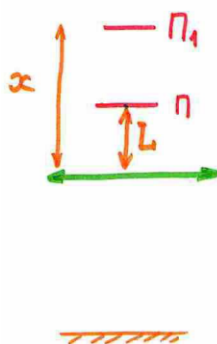
Ответ

Наблюдателю на полу покажется, что потолок имеет высоту 4 м.

Решение

Обозначим $L = 1$ м. Как вытекает из условия задачи, купол зонта можно рассматривать как собирающую линзу с фокусным расстоянием $2L$, которое равно расстоянию от зонта до пола.

Пусть мнимое изображение Π_1 потолка Π в этой линзе находится на расстоянии x от неё:



Согласно формуле тонкой линзы получим

$$\frac{1}{L} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2L}$$

и $x = 2L$. Таким образом, наблюдателю на полу потолок кажется расположенным на расстоянии $2L + 2L = 4L$ от пола.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, отборочный этап, 11 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.