

МОШ, 2014/15, отборочный этап, 8 класс

Условия, ответы и решения

1 Три гоночных автомобиля

Три гоночных автомобиля участвуют в заезде по замкнутой гоночной трассе длиной 1 км. Красный автомобиль 10 минут двигался со скоростью 144 км/ч, а оставшееся время — со скоростью 180 км/ч. Зелёный автомобиль проехал 25 км со скоростью 144 км/ч, а оставшееся расстояние двигался со скоростью 180 км/ч. Синий автомобиль проезжает нечётные круги со скоростью 144 км/ч, а чётные — со скоростью 180 км/ч. Автомобили стартуют с одного места. Заезд длится 20 минут, автомобиль, проехавший наибольшее расстояние, объявляется первым, следующий за ним — вторым, и так далее. Автомобили движутся в одном направлении. Какое расстояние прошел каждый из автомобилей? Какой автомобиль прошел наименьшее расстояние?

Подсказка

Для красного автомобиля известны времена на каждой скорости, для зелёного — пути. Для синего сравните время прохождения нечётного и чётного кругов и найдите, сколько кругов он успеет проехать за 20 минут.

Ответ

Красный автомобиль прошел 54 км, зелёный 53,75 км, синий 53,25 км (наименьшее расстояние).

2 Кубики и шарики на весах: гиря и лишний кубик

У школыницы Карины имеются весы, коробка с одинаковыми кубиками и коробка с одинаковыми шариками. На правой чаше весов — гиря неизвестной массы. В первом опыте Карина стала класть на левую чашу весов кубики (по одному); она увидела, что масса трех кубиков еще меньше массы гири, а масса четырех кубиков уже больше массы гири. Во втором опыте Карина оставила на левой чаше весов один кубик, убрала остальные кубики и стала класть на левую чашу весов шарики; она заметила, что масса кубика и одного шариков меньше массы гири, а масса кубика и двух шариков — уже больше. Чему может быть равно отношение массы шарика к массе кубика? Отношение в ответе записывайте в виде обыкновенной дроби.

Подсказка

Запишите оба опыта как двойные неравенства для массы гири. Вычтя из массы гири массу одного кубика, вы получите для новой величины неравенства и с кубиком, и с шариком; выразите из них m_k и $m_{ш}$ через эту величину.

Ответ

Отношение массы шарика к массе кубика может быть от 1 до 3.

Решение

Пусть $m_{\text{ш}}$ — масса шарика, $m_{\text{к}}$ — масса кубика, M_0 — масса гири. Как вытекает из условия задачи,

$$3m_{\text{к}} < M_0 < 4m_{\text{к}}, \quad m_{\text{к}} + m_{\text{ш}} < M_0 < m_{\text{к}} + 2m_{\text{ш}}.$$

Обозначая $M = M_0 - m_{\text{к}}$, приведём неравенства к виду

$$2m_{\text{к}} < M < 3m_{\text{к}}, \quad m_{\text{ш}} < M < 2m_{\text{ш}}.$$

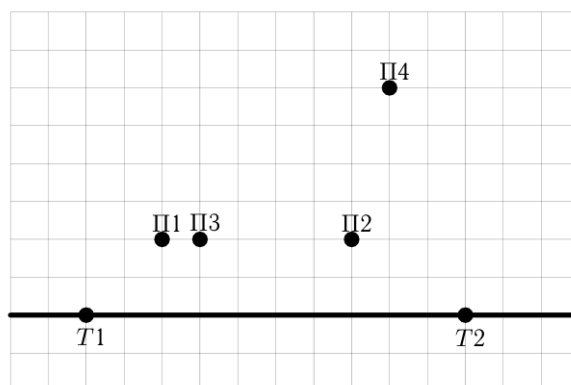
Эти соотношения можно также записать как

$$\frac{1}{3}M < m_{\text{к}} < \frac{1}{2}M, \quad \frac{1}{2}M < m_{\text{ш}} < M.$$

Следовательно, $1 < m_{\text{ш}} : m_{\text{к}} < 3$.

3 Тени предметов на стене

Школьница Светлана исследует тени на стене, отбрасываемые различными предметами. Включив лампочку, Светлана обнаружила, что у предмета П1 образуется тень Т1, а у предмета П2 — тень Т2 (вид сверху показан на рисунке). Перерисуйте рисунок к себе в работу и укажите, где располагается лампочка. Также укажите, какие тени на стене отбрасывают предметы П3 и П4. При решении задачи учитывайте, что свет от лампочки распространяется во все стороны по прямым линиям.

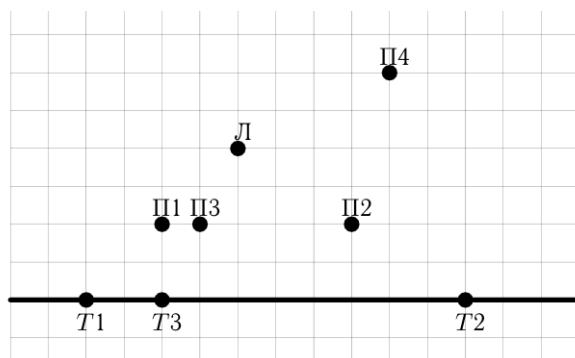


Подсказка

Тень предмета лежит на прямой, соединяющей источник с предметом. Проведите прямые через П1 и Т1, через П2 и Т2 — лампочка лежит на обеих.

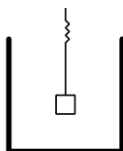
Ответ

Лампочка Л и тень Т3 от предмета П3 приведены на рисунке. Предмет П4 не отбрасывает тень на стену.



4 Пружина и груз над сосудом

Школьница Василиса проводит опыты с пружиной. Сначала Василиса обнаружила, что длина пружины в нерастянутом состоянии составляет 10 см, а груз массой m г, подвешенный к пружине, дополнительно растягивает ее на $0,01m$ см. Затем Василиса подвесила пружину с грузом над сосудом в форме прямоугольного параллелепипеда, как показано на рисунке, и стала наливать в сосуд воду. Груз имеет форму куба длиной ребра 10 см, его плотность равна плотности воды. В начале опыта расстояние от нижней грани груза до дна сосуда составляет 30 см. Площадь основания сосуда составляет 1000 см^2 . Постройте график зависимости длины пружины l от объема воды V , налитой в сосуд. При каких значениях объема V груз находился в воздухе? был частично погружен в воду? был полностью погружен в воду?



Подсказка

Найдите массу груза и длину пружины, пока груз в воздухе. Затем выясните, при каком объеме воды уровень дойдет до нижней грани груза и до его верхней грани, и как сила Архимеда меняет растяжение пружины.

Ответ

График состоит из горизонтальной линии $l = 20$ см при $V < 30$ л (груз в воздухе), наклонного участка, соединяющего точки (20 см; 30 л) и (10 см; 49 л) (груз при V от 30 л до 49 л частично погружен в воду), горизонтальной линии $l = 10$ см при $V > 49$ л (груз полностью в воде).

5 Велосипедист и пешеход на круге

Велосипедист Владислав и пешеход Ярослав участвуют в гонках, начав движение одновременно в одном направлении с отметки «Старт». Часы Владислава показывали:

1. в момент старта — 11:15;
2. в момент, когда Владислав проехал один круг и вновь оказался на отметке «Старт», — 11:23;
3. в момент, когда Владислав обогнал Ярослава, проехав ровно на один круг больше, — 11:26.

Каким может быть отношение скорости Владислава к скорости Ярослава? Скорости движения как велосипедиста, так и пешехода считайте постоянными. При решении задачи учитывайте, что часы Владислава показывают только часы и минуты (секунды не показывают). В частности, в моменты времени от 11 ч 15 мин. до 11 ч 16 мин. часы показывают 11:15.

Подсказка

К моменту обгона пешеход и велосипедист прошли один и тот же путь, но за разное время. Выразите отношение скоростей через моменты старта, первого круга и обгона, а затем учтите, в каких пределах каждый из них может лежать.

Ответ

Отношение скорости велосипедиста к скорости пешехода может быть в интервале от 2,75 до 5,5.

Решение

Пусть t_1 — момент старта, t_2 — момент времени, когда Владислав проехал один круг, t_3 — момент обгона. При этом $t_1 < t_2 < t_3$.

По условию, пешеход прошёл расстояние от старта до момента обгона за время $t_3 - t_1$; велосипедист же прошёл это же расстояние за время $t_3 - t_2$. Отношение k скорости велосипедиста к скорости пешехода равно обратному отношению этих времён:

$$k = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2}. \quad (1)$$

Также данное отношение можно записать как

$$k = 1 + \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}. \quad (2)$$

Поскольку моменты времени t_1 , t_2 и t_3 известны с некоторой погрешностью, исследуем, в каком случае отношение k будет больше и в каком — меньше. К увеличению k приводят: уменьшение t_1 (см. первую формулу); увеличение t_2 (см. первую формулу); уменьшение t_3 (см. вторую формулу). К уменьшению k приводят: увеличение t_1 (см. первую формулу); уменьшение t_2 (см. первую формулу); увеличение t_3 (см. вторую формулу).

Следовательно, максимальное значение k достигается, когда $t_1 = 11$ ч 15 мин, $t_2 = 11$ ч 24 мин, $t_3 = 11$ ч 26 мин. В этом случае $k = 5,5$.

Минимальное значение k достигается, когда $t_1 = 11$ ч 16 мин, $t_2 = 11$ ч 23 мин, $t_3 = 11$ ч 27 мин. В этом случае $k = 2,75$.

6 Линейка с грузиком на краю стола

Экспериментатор проводит опыты с однородной деревянной линейкой длиной 40 см и грузиком. Оказалось, что если уравнивать линейку с грузиком на краю стола, то линейка начинает падать, когда длина её выступающей части превосходит 10 см (грузик при этом подвешивают на нитку за конец линейки). Если же при этом опустить грузик в стакан с водой, плотность которой равна 1000 кг/м^3 , эта длина становится равной 15 см (грузик при этом оказывается полностью погружён в воду). Определите отношение массы груза к массе линейки и плотность груза.

Подсказка

Запишите правило моментов относительно края стола для двух опытов. Во втором опыте на груз вместо mg действует сила тяжести за вычетом силы Архимеда.

Ответ

Отношение массы груза к массе линейки равно 1, отношение плотности груза к плотности воды равно $3/2$ (плотность груза 1500 кг/м^3).

Решение

Пусть $L = 40 \text{ см}$ — длина линейки, $a = 10 \text{ см}$, $b = 15 \text{ см}$ — длины выступающей части линейки в двух опытах, m — масса груза, M — масса линейки, $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, ρ — плотность грузика.

Пусть длина выступающей части линейки равна a . К линейке приложены силы mg — на расстоянии a от оси вращения и Mg на расстоянии $L/2 - a$ от оси вращения. Поскольку линейка находится в равновесии, на основе правила рычага получим: $mga = Mg(L/2 - a)$ и $M/m = a/(L/2 - a) = 1$.

Пусть длина выступающей части линейки равна b . К концу линейки приложена сила F , равная разности силы тяжести mg , действующей на груз, и силы Архимеда $\rho_0 g \cdot m/\rho$: $F = mg(1 - \rho_0/\rho)$. К середине линейки, на расстоянии $L/2 - b$ от оси вращения, приложена сила Mg . По правилу рычага, $Fb = Mg(L/2 - b)$. Отсюда

$$mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) b = Mg \left(\frac{L}{2} - b\right)$$

и

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 - \frac{M}{m} \cdot \frac{L/2 - b}{b} = \frac{2}{3}.$$

7 Серебряный кубик с алюминием внутри

Школьница Ирина исследует кубики с длиной ребра 1 см. При взвешивании серебряного кубика почему-то оказалось, что его масса меньше, чем масса железного кубика. Ирина предположила, что внутри серебряного кубика имеется кусок алюминия неизвестного объёма. Каким может быть объём алюминия, находящегося внутри серебряного кубика? Какой может быть масса серебра? А масса алюминия? Плотность серебра $10,3 \text{ г/см}^3$, алюминия $2,7 \text{ г/см}^3$, железа $7,8 \text{ г/см}^3$.

Подсказка

Запишите массу кубика как сумму масс серебра и алюминия через неизвестный объём алюминия и потребуйте, чтобы она была меньше массы железного кубика.

Ответ

Объём алюминия должен быть в интервале от $0,33 \text{ см}^3$ до 1 см^3 , масса серебра — меньше $6,9 \text{ г}$, но больше нуля, масса алюминия — от $0,89 \text{ г}$ до $2,7 \text{ г}$.

Решение

Введём обозначения: $\rho_c = 10,3 \text{ г/см}^3$ — плотность серебра, $\rho_a = 2,7 \text{ г/см}^3$ — плотность алюминия, $\rho_0 = 7,8 \text{ г/см}^3$ — плотность железа.

Пусть $V_0 = 1 \text{ см}^3$ — объём кубика, V_a — объём алюминия, тогда $V_0 - V_a$ — объём серебра. По условию, масса серебряного кубика $\rho_c(V_0 - V_a) + \rho_a V_a$ должна быть меньше массы железного кубика $\rho_0 V_0$:

$$\rho_c(V_0 - V_a) + \rho_a V_a < \rho_0 V_0.$$

Следовательно,

$$V_a > \frac{\rho_c - \rho_0}{\rho_c - \rho_a} V_0 = 0,33 \text{ см}^3.$$

В то же время объём алюминия не может быть больше $V_0 = 1 \text{ см}^3$.

Масса серебра $\rho_c(V_0 - V_a)$ при этом должна быть меньше $6,9 \text{ г}$, а масса алюминия $\rho_a V_a$ должна быть в промежутке от $0,89 \text{ г}$ до $2,7 \text{ г}$.

8 График шкал Цельсия и Фаренгейта

Школьница Алиса проводит опыты с термометром, на который нанесены две шкалы — шкала Цельсия и шкала Фаренгейта. Сравнивая шкалы, Алиса заметила, что 20 градусов Цельсия (20°C) соответствуют 68 градусам Фаренгейта (68°F), а 40 градусов Цельсия (40°C) — 104 градусам Фаренгейта (104°F). Постройте график зависимости температуры по шкале Фаренгейта t_F от температуры по шкале Цельсия t_C , зная, что он является прямой линией. Запишите формулу, выражающую температуру по шкале Фаренгейта t_F через температуру по шкале Цельсия t_C . Какой температуре по шкале Фаренгейта соответствует температура плавления льда 0°C ? Температура кипения воды 100°C ? Абсолютный нуль -273°C ?

Подсказка

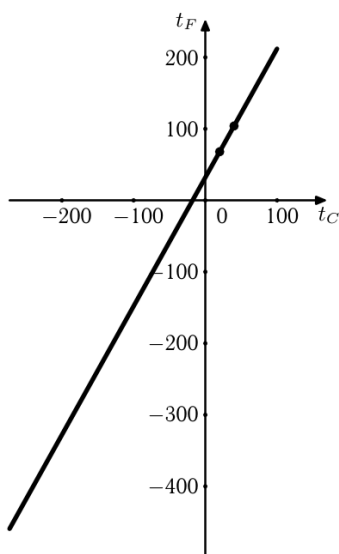
Прямая задаётся уравнением $t_F - 68 = k(t_C - 20)$; коэффициент k найдите по второй известной точке.

Ответ

$t_F = 68 + 1,8(t_C - 20) = 32 + 1,8 t_C$. Температура плавления льда соответствует значению 32°F , температура кипения воды — значению 212°F , температура -273°C — значению $-459,4^\circ\text{F}$.

Решение

График зависимости температуры по Фаренгейту от температуры по Цельсию приведён на рисунке.



Уравнение прямой, проходящей через точку $(t_C = 20; t_F = 68)$, можно записать как $t_F - 68 = k \cdot (t_C - 20)$, где k — некоторый коэффициент. Поскольку данная прямая должна проходить также через точку $(t_C = 40; t_F = 104)$, имеем: $104 - 68 = k \cdot (40 - 20)$ и $k = 1,8$. Следовательно,

$$t_F = 68 + 1,8 \cdot (t_C - 20) = 32 + 1,8 t_C.$$

В частности, температура плавления льда соответствует значению 32°F , температура кипения воды — значению 212°F , температура -273°C — значению $-459,4^\circ\text{F}$.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, отборочный этап, 8 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.