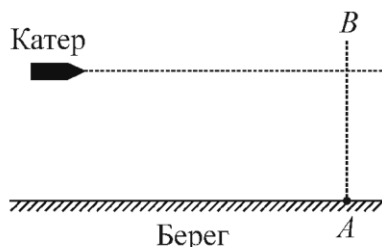


МОШ, 2014/15, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Волны от катера у берега

По спокойной поверхности озера плывёт маленький катер, траектория которого параллельна прямой линии берега и лежит от него на расстоянии L . Стоящий в точке A наблюдатель увидел, что первая волна от катера достигла точки A спустя время t после того, как катер пересёк прямую AB , перпендикулярную берегу (см. рис). После этого волны ударили о берег в этом месте с периодом T . Расстояние между соседними гребнями волн равно λ . Найдите скорость катера.



Подсказка

Волны, созданные катером, образуют фронт под некоторым углом к курсу катера. Скорость волн относительно воды связана с λ и периодом, с которым фронты проходят мимо точки A , а положение фронта в момент прихода к A находится из геометрии.

Ответ

$$v = \frac{\lambda}{\sqrt{T^2 - \left(\frac{\lambda t}{L}\right)^2}}.$$

2 Бусинка на вертикальном кольце

В вертикальной плоскости закреплено круглое кольцо радиусом R , на которое в верхней точке надета бусинка массой m . После небольшого толчка бусинка начинает соскальзывать вниз по кольцу под действием силы тяжести. Всеми силами трения можно пренебречь.

1. С какой силой бусинка давит на кольцо в точке, лежащей на его горизонтальном диаметре?
2. Чему равен модуль импульса бусинки в момент, когда она не давит на кольцо?

Подсказка

Скорость на любой высоте даёт закон сохранения энергии, а сила реакции входит во второй закон Ньютона для движения по окружности. «Не давит на кольцо» означает нулевую силу реакции.

Ответ

$$1) F = 2mg, \text{ сила направлена по радиусу от центра кольца; } 2) p_0 = m\sqrt{\frac{2}{3}}gR.$$

3 Смеситель с двумя кранами

На водопроводном смесителе установлены два крана — холодный и горячий. Краны одинаковы по своей конструкции — она такова, что количество воды, протекающее через каждый кран за одну секунду, пропорционально углу поворота крана при его открывании. Если повернуть холодный кран на угол $\alpha_1 = 180^\circ$, а горячий кран — на угол $\beta_1 = 60^\circ$, из крана потечёт вода температурой $t_1 = 36^\circ\text{C}$. Если же повернуть холодный кран на угол $\alpha_2 = 120^\circ$, а горячий кран — на угол $\beta_2 = 90^\circ$, то из крана потечёт вода температурой $t_2 = 48^\circ\text{C}$. Найдите температуру воды, текущей из крана, когда холодный кран повернут на угол $\alpha_3 = 160^\circ$, а горячий кран повернут на угол $\beta_3 = 80^\circ$. Потерями теплоты в смесителе пренебречь.

Подсказка

Расход каждой струи пропорционален углу, поэтому уравнение теплового баланса можно писать прямо через углы. Неизвестны температуры холодной и горячей воды — два опыта как раз дают два уравнения для них.

Ответ

$$t_3 = 41,6^\circ\text{C}.$$

4 Аргон под поршнем с водой

В нижней части вертикального цилиндрического сосуда, разделённого подвижным лёгким поршнем, находится аргон. Верхняя часть сосуда полностью заполнена водой массой $m = 1\text{ кг}$ и открыта в атмосферу. При температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$ поршень расположен на высоте, составляющей $1/4$ высоты сосуда. После нагревания всей системы до температуры $t_2 = 127^\circ\text{C}$ равновесие достигается при расположении поршня на $1/2$ высоты сосуда. Найдите площадь S поперечного сечения сосуда и высоту H сосуда. Атмосферное давление $p_0 = 10^5\text{ Па}$. Абсолютный нуль считайте равным $t_0 = -273^\circ\text{C}$, плотность воды $\rho = 1000\text{ кг/м}^3$, ускорение свободного падения $g = 10\text{ м/с}^2$.

Подсказка

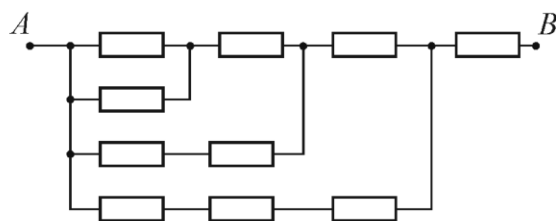
Пока поршень поднимается, часть воды вытекает через край, так что давление газа меняется. Запишите давление газа в двух состояниях через вес оставшейся воды и примените уравнение состояния газа.

Ответ

$$S = \frac{mg}{p_0 \left(2\frac{T_1}{T_2} - 1 \right)} = 2 \cdot 10^{-4}\text{ м}^2 = 2\text{ см}^2; \quad H = \frac{4p_0}{3\rho g} \left(2\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \approx 6,7\text{ м}.$$

5 Перерезанный провод в цепи

Участок AB электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из одинаковых резисторов и проводов, сопротивление которых пренебрежимо мало. Сопротивление этого участка цепи равно $R_1 = 219$ Ом. После того, как школьник Вася перерезал один из проводов, сопротивление участка AB стало равным $R_2 = 255$ Ом. В каких точках Вася мог перерезать провод? Укажите две такие точки. Ответ обоснуйте.

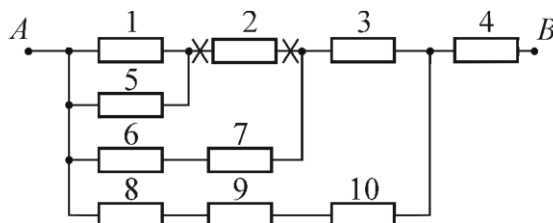


Подсказка

Сначала найдите сопротивление одного резистора по R_1 , упростив схему. Затем посмотрите, какой разрыв провода превратит часть параллельных ветвей в более длинную последовательную цепочку.

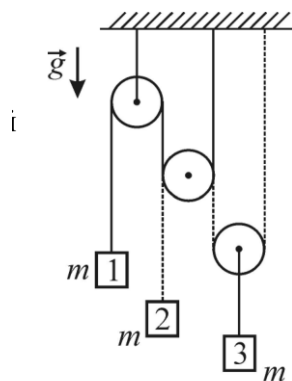
Ответ

Вася мог перерезать провод возле резистора №2 с любой из сторон от него (соответствующие места показаны на рисунке крестиками).



6 Система блоков с тремя грузами

Система, показанная на рисунке, состоит из трёх блоков, трёх одинаковых грузов, двух нитей (первая нить показана на рисунке сплошной линией, вторая — пунктирной) и короткой верёвочки. К концу первой нити, перекинутой через средний и левый блоки, прикреплён первый груз массой m . К концу второй нити, перекинутой через правый и средний блоки, прикреплён второй груз массой m . Третий груз такой же массой подвешен на верёвочке к оси правого блока. Участки нитей, не лежащие на блоках, вертикальны. Все блоки и нити можно считать невесомыми, нити и верёвочку нерастяжимыми, а силы трения пренебрежимо малыми. При вращении среднего блока первая и вторая нити не мешают друг другу. Найдите модули ускорений грузов.



Подсказка

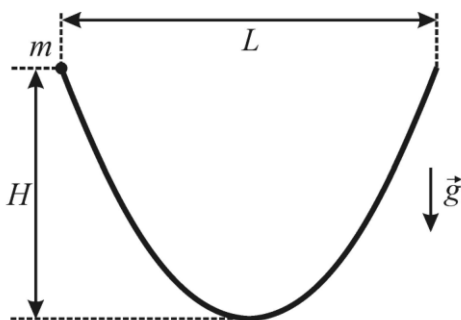
Для невесомого блока натяжения нитей по обе стороны одинаковы, а сумма сил на блок равна нулю. Выразите силы, действующие на блоки, через натяжения двух нитей и составьте уравнение связи длин нитей.

Ответ

Модули ускорений всех грузов одинаковы и равны $a = g/3$.

7 Бусинка на параболической проволоке

Отрезок проволоки изогнут в виде симметричного участка параболы и расположен так, что ось её симметрии вертикальна. На этот отрезок надевают маленькую бусинку массой m , удерживая её у одного из краёв проволоки. Затем бусинку отпускают без начальной скорости, и она начинает скользить по проволоке под действием силы тяжести. Найдите модуль силы, с которой бусинка будет давить на проволоку, находясь в самой нижней точке своей траектории. Трение пренебрежимо мало. Размеры L и H , указанные на рисунке, известны.



Подсказка

Скорость внизу найдите из закона сохранения энергии, а второй закон Ньютона для движения по окружности требует радиуса кривизны параболы в вершине. Его можно найти, сравнив параболу с окружностью вблизи вершины.

Ответ

$$N = mg \left(1 + \frac{16H^2}{L^2} \right).$$

8 Цикл из политропных процессов

Один моль идеального газа участвует в циклическом процессе $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ тепловой машины, работающей в режиме теплового двигателя. В состоянии 1 газ имеет температуру T_1 и объём V_1 . Известно, что все переходы газа из одного состояния в другое — политропические. Показатель политропы процесса $2 \rightarrow 3$ на единицу больше показателя политропы процесса $3 \rightarrow 1$ и на единицу меньше показателя политропы процесса $1 \rightarrow 2$. В процессе $1 \rightarrow 2$ объём газа увеличивается в k раз. Один из процессов цикла — изотермический, причём в этом процессе объём газа изменяет своё значение в максимально широких пределах в этом цикле.

1. Определите объём и температуру газа в состоянии 3.
2. Изобразите на pV -диаграмме цикл, соответствующий условию задачи, указав для каждого из процессов его показатель политропы.

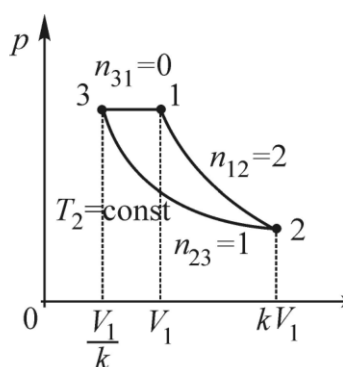
Справка: Политропическим называется процесс, в течение которого теплоёмкость газа не изменяется: $C = \text{const}$. Уравнение такого процесса имеет вид $pV^n = \text{const}$, или $p_1 V_1^n = p_2 V_2^n$. Величину n называют показателем политропы.

Подсказка

Обозначьте показатель процесса $2 \rightarrow 3$ через n , тогда два других — $n - 1$ и $n + 1$. Изотерме соответствует $n = 1$; переберите, какой из трёх процессов может быть изотермой, и используйте условие про наибольшее изменение объёма.

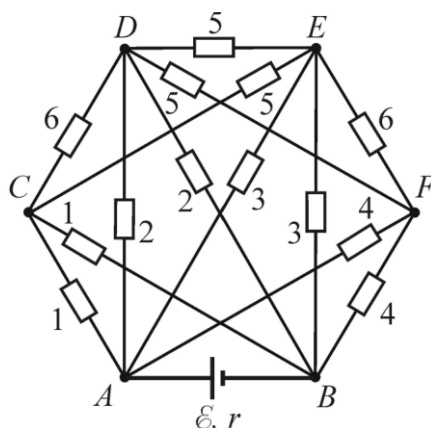
Ответ

1) $V_3 = V_1/k$, $T_3 = T_1/k$; 2) диаграмма на рисунке: $n_{31} = 0$ (изобара), $n_{12} = 2$, $n_{23} = 1$ (изотерма, $T_2 = \text{const}$).



9 Мощность в цепи ACDEFB

Найдите тепловую мощность, выделяющуюся в участке $ACDEFB$ цепи, подключённом в точках A и B к батарее с ЭДС $\mathcal{E} = 5$ В и внутренним сопротивлением $r = 1,04$ Ом. Сопротивления резисторов указаны на схеме в Ом, сопротивлением соединительных проводов можно пренебречь. Провода соединены только в местах, обозначенных точками.



Подсказка

Схема симметрична относительно перпендикуляра к AB . Посмотрите, нет ли пар резисторов, на которых при такой симметрии разность потенциалов равна нулю.

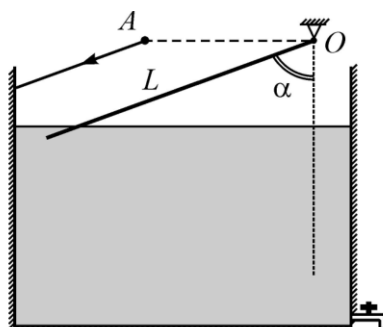
Ответ

На отдельных резисторах выделяются мощности: $P_{AC} = P_{CB} = 1,44$ Вт, $P_{AF} = P_{FB} = 0,36$ Вт, $P_{AD} = P_{DB} = 0,72$ Вт, $P_{AE} = P_{EB} = 0,48$ Вт, $P_{CD} = P_{CE} = P_{DE} = P_{DF} = P_{EF} = 0$. На всех резисторах цепи $ACDEFB$ выделяется тепловая мощность $P = 6$ Вт.

10 Палочка в жидкости и лазерный луч

Отличник Тимофей уравновесил тонкую однородную палочку, прикреплённую одним концом к шарниру, опустив другой её конец в вертикальный сосуд с жидкостью. При этом палочка находилась в равновесии, располагалась под углом α к вертикали и была погружена в жидкость на $1/n$ часть своей длины. Площадь горизонтального поперечного сечения сосуда S , длина палочки L , плотность её материала ρ . Стенки сосуда и поверхность палочки посеребрены.

В некоторой точке A над поверхностью жидкости, на одной высоте с точкой крепления палочки, экспериментатор Тимофей расположил выходное окно лазерной указки, и направил от неё на стенку сосуда узкий световой луч, идущий параллельно палочке. Этот луч, распространяясь только в воздухе, отразился от стенки сосуда, затем отразился от палочки, и вернулся обратно в точку A . Но тут «добрая» подруга Анфиса решила привлечь внимание Тимофея и приоткрыла кран, через который жидкость начала медленно выливаться из сосуда. Тимофей сначала рассердился, но быстро успокоился, так как понял, что через некоторое время луч всё равно вернётся в точку A — главное, вовремя закрыть кран! Какую массу жидкости следует вылить из сосуда для того, чтобы при неизменном угле падения света на стенку сосуда луч света, испущенный из точки A , распространяясь только в воздухе, опять вернулся в эту точку?



Подсказка

Чтобы луч вернулся в A , он должен падать на палочку перпендикулярно; значит, во втором положении палочка должна стоять под углом $90^\circ - \alpha$ к вертикали. Равновесие палочки в обоих положениях запишите по правилу моментов относительно шарнира.

Ответ

$$m_{\text{ж}} = \rho_{\text{ж}} S \Delta H = \rho S L \frac{n(n-1)}{2n-1} (\sin \alpha - \cos \alpha); \text{ решение существует при } \alpha > \pi/4.$$