

МОШ, 2014/15, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Лыжницы в погоне

Школьницы Алиса и Василиса участвуют в лыжных гонках. Сразу после старта лыжницам пришлось подниматься в горку. Алиса, скорость которой на подъеме составляла 8 км/ч, отстала от Василисы, поднимавшейся со скоростью 12 км/ч. Спустя километр подъем закончился, и Алиса со скоростью 20 км/ч устремилась в погоню за Василисой, двигавшейся со скоростью 15 км/ч. Какое расстояние надо будет пройти Алисе по горизонтальной лыжной трассе, чтобы догнать Василису?

Подсказка

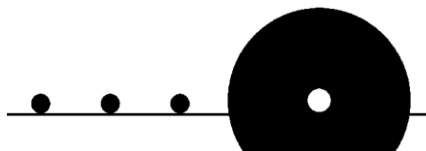
Найдите, на сколько Василиса опередила Алису к концу подъёма, и с какой скоростью Алиса сокращает отставание на ровном участке.

Ответ

Чтобы догнать Василису, Алисе надо будет пройти по горизонтальной лыжной трассе расстояние 2,5 км.

2 Стробоскоп и шарики на ленте

Стробоскоп представляет собой диск с небольшим отверстием в центре и механизмом подсветки. В момент, когда подсветка включается на короткий промежуток времени, можно увидеть предмет, находящийся позади отверстия. За стробоскопом на движущейся ленте установлены шарики, расположенные на одинаковом расстоянии 10 см друг от друга. Найдите все возможные скорости ленты, при которых каждый шарик можно наблюдать в отверстие. Частота мигания подсветки — 1 раз за 0,5 с.



Подсказка

За время между вспышками лента должна сместиться так, чтобы у отверстия оказался какой-то шарик. На какие расстояния это возможно?

Ответ

Каждый шарик можно наблюдать в отверстие при скоростях ленты $V = 20/n$ см/с, где $n \geq 1$ — целое число.

3 Обгон стрелок башенных часов

Часовая стрелка на больших башенных часах в самом широком месте имеет ширину $H = 13$ футов. От концов отрезка такой ширины на часовой стрелке до оси циферблата часов расстояние равно $L = 25$ футов. Минутная стрелка на таком же расстоянии от оси циферблата имеет ширину $h = 5$ футов. Стрелки движутся плавно (без скачков). Определите, за сколько секунд минутная стрелка обгоняет часовую (во время обгона она частично закрывает часовую стрелку). Считается, что обгон начинается в момент, когда минутная стрелка начинает закрывать часовую стрелку в ее самом широком месте, а заканчивается, когда стрелки перестают «перекрываться» в этом месте для наблюдателя, смотрящего на часы издали.

Для справки: длина окружности радиусом R равна $2\pi R$, где $\pi \approx 3,14$.

Подсказка

Сравните скорости движения точек на одинаковом расстоянии от оси у двух стрелок и найдите, какой путь относительно друг друга они должны пройти за время обгона.

Ответ

Минутная стрелка обгоняет часовую за время $0,125 \text{ ч} = 7,5 \text{ мин} = 450 \text{ с}$.

4 Смесь песка и цемента

Для строительства дома требуется смесь песка со щебнем и цемента общей массой 28 тонн, содержащая цемент и песок с щебнем в отношении 1:8 (по объёму). На стройке уже имеется 3 тонны песка со щебнем и 3 тонны цемента, а остальные материалы хранятся на складе недалеко от стройплощадки.

1. Сколько тонн песка со щебнем и сколько тонн цемента требуется для строительства дома?
2. Сколько поездок потребуется совершить, чтобы доставить недостающие строительные материалы, если вместимость кузова электрокара, в котором их будут перевозить, составляет 400 л?

Плотность смеси песка со щебнем — $1,6 \text{ г/см}^3$, а цемента — $1,2 \text{ г/см}^3$. За один раз можно перевозить только один вид стройматериалов (иначе они будут смешиваться прямо в кузове в неправильной пропорции).

Подсказка

Отношение объёмов задано, поэтому выразите массы компонентов через объёмы и плотности. Число поездок — целое, округляйте для каждого материала отдельно.

Ответ

1) цемента 2,4 т, песка со щебнем 25,6 т; 2) 36 поездок.

5 Тренер и ученик на стадионе

Тренер проводит занятия по физкультуре необычным способом. Сам он начинает идти по кругу стадиона с постоянной скоростью $u = 1$ м/с. За тренером в тот же момент по кругу стадиона начинает бежать его ученик, который все время движется с постоянной скоростью $V = 3$ м/с. Когда он достигает тренера, ученик быстро разворачивается, возвращается обратно, добираться до старта, снова быстро разворачивается, опять бежит до тренера, и далее повторяет эти действия нужное число раз. В конечном итоге тренер и ученик пришли к финишу одновременно, причем тренер прошел менее одного круга.

1. Какой путь S_1 пробежал ученик к моменту первой встречи с тренером?
2. Какой путь S пробежал ученик до момента финиша?

Длина окружности стадиона от старта до финиша равна $L = 400$ м. В момент старта ученика и тренера длина дуги окружности между ними была равна $D = 100$ м. Ученик начинает бежать с линии старта, которая совпадает с линией финиша.

Подсказка

Ученик всё время бежит с одной и той же скоростью, поэтому его путь определяется полным временем движения. Сколько времени тренеру нужно, чтобы дойти до финиша?

Ответ

$$1) S_1 = \frac{VD}{V-u} = 150 \text{ м}; \quad 2) S = \frac{V(L-D)}{u} = 900 \text{ м}.$$

6 Наполнение сосуда двумя кранами

Школьник Николай проводит опыт по наполнению сосуда водой. Когда Николай открыл кран с горячей водой, электронные часы показывали 07:03. Когда сосуд заполнился на четверть (часы показывали 07:10), Николай дополнительно открыл кран с холодной водой. Когда сосуд заполнился до половины (на часах было 07:13), Николай закрыл кран с горячей водой. Каким может быть показание часов, когда сосуд заполнится полностью? При решении учитывайте, что часы показывают, например, время 07:03 в моменты времени от 7 ч 03 мин. 00 с до 7 ч 03 мин. 59,9999... с, а затем показание часов скачком изменяется на 07:04. Открывание и закрывание кранов производится очень быстро.

Подсказка

Запишите расходы воды из каждого крана через время заполнения, учтя, что показания часов известны лишь с точностью до минуты, и оцените границы возможных значений.

Ответ

В момент заполнения сосуда часы могут показывать любое время от 07:18 до 07:38.

7 Плотность кварца в бутылке

Вася наполнил две одинаковые легкие пластиковые бутылки емкостью 1 литр кварцевым песком по самое горлышко, и взвесил их. Получились одинаковые массы 1530 г. Затем Вася аккуратно пересыпал песок из одной бутылки в пакет, заполнил бутылку наполовину водой и медленно высыпал весь песок из пакета обратно в эту бутылку, которая снова оказалась заполненной по самое горлышко смесью песка с водой. Весы показали массу бутылки 1866 г. Какова плотность кварца?

Подсказка

Часть воды при высыпании песка вытекла. Выразите массу бутылки через объём песка и объём оставшейся воды.

Ответ

Плотность кварца равна $2,30 \text{ г/см}^3$.

8 Закон Гей-Люссака и масса воздуха

В 1802 году Ж. Гей-Люссак, исследуя тепловое расширение воздуха, обнаружил, что объём порции воздуха при атмосферном давлении линейно зависит от температуры, измеряемой в градусах Цельсия: график зависимости объёма от температуры является прямой линией. При этом объёмы воздуха при температурах 100°C и 0°C относятся примерно как $11 : 8$.

1. Запишите формулу, выражающую плотность ρ воздуха при температуре t через плотность воздуха ρ_0 при 0°C и температуру t (выраженную в градусах Цельсия).
2. Определите отношение плотности воздуха при температуре 10°C к плотности воздуха при температуре 20°C .
3. Считая плотность воздуха при 0°C равной $\rho_0 = 1,3 \text{ кг/м}^3$, рассчитайте, как и на сколько изменится масса воздуха в помещении объёмом 40 м^3 при уменьшении температуры от 20°C до 10°C .

Подсказка

Запишите линейную зависимость $V(t)$ через V_0 и найдите коэффициент по отношению объёмов; плотность обратно пропорциональна объёму фиксированной массы.

Ответ

1) $\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \frac{3}{800}t}$; 2) $\frac{\rho_{10}}{\rho_{20}} = \frac{86}{83} \approx 1,036$; 3) масса воздуха в помещении увеличится на $\Delta m \approx 1,75 \text{ кг}$.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2014/15, заключительный этап, 7 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.