

МОШ, 2015/16, отборочный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Лёд с дробинкой в закрытом баке

В герметично закрытом баке находится вода при температуре 0°C . В воде плавает кусок льда массой 1 кг , в который вмёрзла свинцовая дробинка массой 100 г . Какое количество теплоты нужно подвести к содержимому бака, чтобы лёд с дробинкой затонули? Чему будет равна масса льда, в момент, когда лёд с дробинкой начнут тонуть? Как изменится уровень воды в баке после того, как лёд с дробинкой утонут?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1,0\text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,9\text{ г/см}^3$, плотность свинца $\rho_{\text{с}} = 11,3\text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335\text{ кДж/кг}$. Дробинка находится в середине куска льда и не отрывается от него.

Подсказка

Лёд с дробинкой начнёт тонуть, когда их средняя плотность сравняется с плотностью воды. Что при таянии льда происходит с этой средней плотностью?

Ответ

Нужно подвести $60,3\text{ кДж}$ (около 60 кДж); масса льда будет равна 820 г ; уровень воды понизится.

Решение

Когда средняя плотность оставшегося льда и дробинки станет больше плотности воды, дробинка начнёт тонуть, т. е.

$$\frac{M_1 + m}{V} = \frac{M_1 + m}{\frac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m}{\rho_{\text{с}}}} = \rho_{\text{в}}, \quad \text{следовательно} \quad M_1 = \frac{m(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}} \approx 820\text{ г},$$

где M_1 — масса оставшегося льда, m — масса дробинки. Растаять должна масса льда $\Delta M = M - M_1$, где M — первоначальная масса льда. Значит, необходимо подвести количество теплоты

$$Q = \lambda \Delta M = \lambda \left(M - m \frac{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}} \right) \approx 60\text{ кДж}.$$

Так как оставшийся лёд с дробинкой опустятся на дно бака и будут давить на него с некоторой силой, то сила давления воды на дно должна уменьшиться, чтобы суммарная сила давления на дно осталась неизменной. Значит, уровень воды понизится.

2 Треугольник из шести металлических частей

Вася решил изготовить плоскую деталь в форме треугольника по следующей схеме. Сначала картонную модель треугольника он разделил медианами на 6 частей. Затем отдельные части заменил копиями, изготовленными из разных металлов. Используемые металлы и их плотности представлены в таблице. Определите возможные варианты средней плотности получившегося треугольника, собранного из отдельных металлических деталей, если все из перечисленных металлов были использованы ровно по два раза. Сколько различных вариантов средней плотности может получиться, если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза? Какая средняя плотность детали в этом случае максимальная, а какая минимальная?

Металл	Плотность, г/см ³
Свинец	11,40
Медь	8,96
Сталь	7,60

Подсказка

Чему равны площади шести частей, на которые медианы делят треугольник? Тогда средняя плотность выражается через плотности частей очень просто.

Ответ

При двойном использовании каждого металла $\bar{\rho} = 9,32$ г/см³ (единственный вариант); при использовании каждого металла хотя бы раз получается 10 вариантов; $\bar{\rho}_{\min} = 8,46$ г/см³, $\bar{\rho}_{\max} = 10,36$ г/см³.

Решение

Легко доказывается, что медианы делят треугольник на 6 равновеликих частей. Поэтому средняя плотность равна «среднему арифметическому» плотностей используемых металлов:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \frac{S}{6}}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i}{6}.$$

Так как все виды металлов были использованы по два раза, средняя плотность получившегося треугольника принимает только одно возможное значение

$$\bar{\rho} = \frac{11,40 + 8,96 + 7,60}{3} = 9,32 \text{ г/см}^3.$$

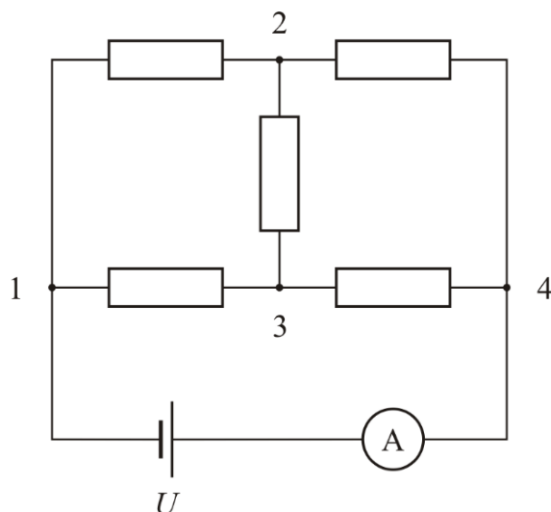
Если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза, то возможных вариантов с различной средней плотностью 10 (каждое число в фигурных скобках соответствует количеству частей треугольника определённой плотности): {4, 1, 1} — три варианта, {2, 2, 2} — один вариант, {3, 2, 1} — шесть вариантов.

$$\bar{\rho}_{\min} = \frac{4 \cdot 7,6 + 8,96 + 11,4}{6} = 8,46 \text{ г/см}^3, \quad \bar{\rho}_{\max} = \frac{4 \cdot 11,4 + 7,6 + 8,96}{6} = 10,36 \text{ г/см}^3.$$

3 Мостовая схема и амперметр

Вася нашёл в ящике своего папы-физика четыре резистора сопротивлением 1 Ом каждый, один резистор сопротивлением 4 Ом, амперметр, батарейку с напряжением $U = 4,5$ В и провода. С использованием этих элементов Вася собрал цепь, схема которой изображена на рисунке (такая схема называется мостовой). Какой из резисторов нужно отключить Васе для того, чтобы показания амперметра изменились сильнее всего? Вася знает расположение резистора с сопротивлением 4 Ом, но пока вы не расскажете, что ему надо делать, он Вам не покажет, где располагается этот резистор.

Рассмотрите два случая: А) если резистор сопротивлением 4 Ом включен в диагональ моста (то есть между точками 2 и 3); и Б) если этот резистор включен НЕ в диагональ моста. Для каждого случая дайте ответ на вопрос задачи. Для первого случая дополнительно рассчитайте чему равно изменение показаний амперметра. Батарейку можно считать идеальным источником напряжения, амперметр также считайте идеальным.



Подсказка

Чем больше ток через резистор, тем сильнее изменится общий ток при его отключении. Через какие резисторы ток наибольший в каждом из двух случаев?

Ответ

В первом случае нужно отключить любой резистор с сопротивлением 1 Ом; во втором случае нужно отключить резистор с сопротивлением 1 Ом, подключённый к тому же полюсу батарейки, что и резистор с сопротивлением 4 Ом; абсолютная величина изменения показаний амперметра в первом случае равна 2 А.

Решение

Если резистор 4 Ом включен в диагональ моста, то его не имеет смысла вытаскивать, потому что показания амперметра при этом не изменятся. То есть в этом случае надо отключить любой резистор 1 Ом. Если же резистор 4 Ом подключён, например, к плюсу батарейки (это на самом деле не принципиально), то нужно отключить резистор 1 Ом, который тоже подключён к плюсу батарейки, так как через него течёт самый большой ток.

Для случая, когда резистор сопротивлением 4 Ом включен в диагональ моста:

Вначале ток через диагональ моста не течёт и сопротивление всей цепи равно

$$R_1 = \left(\frac{1}{2 \text{ Ом}} + \frac{1}{2 \text{ Ом}} \right)^{-1} = 1 \text{ Ом}.$$

После отключения одного из резисторов сопротивлением 1 Ом полное сопротивление всей цепи будет равно

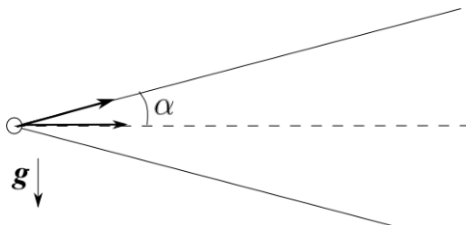
$$R_2 = 1 \text{ Ом} + \left(\frac{1}{1 \text{ Ом}} + \frac{1}{5 \text{ Ом}} \right)^{-1} = \frac{11}{6} \text{ Ом} \approx 1,83 \text{ Ом}.$$

Абсолютная величина изменения показаний амперметра равна

$$\frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = 2 \text{ А}.$$

4 Фонарь и брошенные шарики

Тёмной ночью на верхушку высокого столба повесили фонарь так, что пучок излучаемого им света образует прямой круговой конус с углом раствора 2α , и ось этого конуса параллельна земле. Из точки крепления фонаря бросают маленькие шарики с одним и тем же модулем начальной скорости так, что их траектории полностью лежат в вертикальной плоскости, содержащей ось конуса. Первый шарик, запущенный вдоль оси конуса, был виден в течение времени $\tau = 2 \text{ с}$. В течение какого времени τ_1 будет виден шарик, запущенный вверх под углом α к горизонту? Через какое время τ_2 с момента начала движения этот шарик пересечёт ось конуса? Чему равен модуль начальной скорости v , с которой запускают шарики?



Считайте пучок узконаправленным (угол раствора конуса достаточно мал). Размерами фонаря и шариков можно пренебречь. Для малых углов $\sin \alpha \approx \tan \alpha \approx \alpha$ (когда α выражен в радианах), $\cos \alpha \approx 1$. Ускорение свободного падения g известно.

Подсказка

Запишите координаты шарика как функции времени и найдите момент, когда он пересекает образующую конуса: шарик виден, пока он внутри конуса.

Ответ

$$\tau_1 = 4 \text{ с}, \quad \tau_2 = 2 \text{ с}, \quad v = \frac{g\tau}{2\alpha}.$$

Решение

Выберем начало координат в точке крепления фонаря, ось x направим вдоль оси конуса в направлении распространения света, ось y направим вверх. Для шарика, пущенного горизонтально:

$$x(t) = vt, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2}.$$

В момент времени τ траектория шарика пересекается с образующей конуса, поэтому координаты шарика удовлетворяют условию

$$y(\tau) = -x(\tau) \operatorname{tg} \alpha \approx -\alpha x(\tau), \quad \text{откуда} \quad \tau = \frac{2\alpha v}{g}.$$

Для второго шарика

$$x(t) = vt \cos \alpha \approx vt, \quad y(t) = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2} \approx \alpha vt - \frac{gt^2}{2}.$$

Время τ_1 находим из аналогичного условия

$$y(\tau_1) = -\alpha x(\tau_1), \quad \text{откуда} \quad \tau_1 = \frac{4\alpha v}{g} = 2\tau = 4 \text{ с}.$$

Время τ_2 найдём, приравняв к нулю $y(t)$:

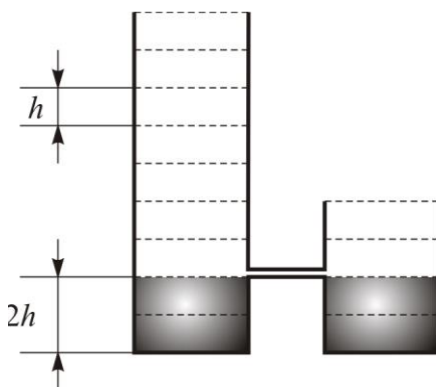
$$\alpha v \tau_2 - \frac{g\tau_2^2}{2} = 0, \quad \text{откуда} \quad \tau_2 = \frac{2\alpha v}{g} = \tau = 2 \text{ с}.$$

Модуль начальной скорости, с которой бросают шарики,

$$v = \frac{g\tau}{2\alpha}.$$

5 h-образная трубка с водой и маслом

Какой максимальный объём воды плотностью ρ можно налить в h-образную трубку с открытыми концами, частично заполненную маслом плотностью $0,8\rho$? Площадь сечения вертикальных колен трубки S . Объёмом горизонтальной соединительной трубочки можно пренебречь. Размеры h-образной трубки и высота столба воды указаны на рисунке. Пунктирные деления на трубке сделаны через одинаковое расстояние h , которое известно. Затыкать открытые концы, наклонять трубку и выливать из неё жидкости нельзя.



Подсказка

Воду выгодно лить туда, где она вытесняет масло в соседнее колено. Когда этот процесс закончится и какое условие равенства давлений нужно записать?

Ответ

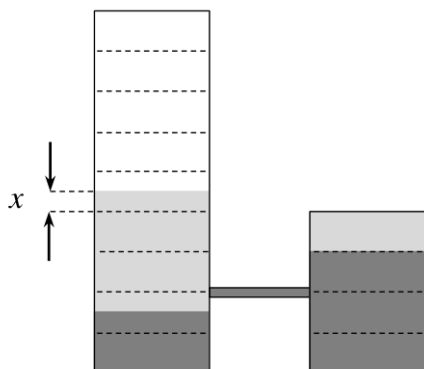
$$V = 4,25 Sh.$$

Решение

Главное — чтобы в коротком колене осталось как можно меньше масла, тогда в высокой трубке можно будет создать столб максимальной высоты, превышающей $4h$. Для этого начинаем наливать воду в правое колено. За счёт большей плотности она будет вытеснять масло в левое колено. Так будет продолжаться до высоты воды $2h$ в правом и высоты масла $3h$ в левом. Дальнейшее вытеснение масла невозможно, так как граница раздела масло/вода в правом колене станет выше соединительной трубки и в левое колено начнёт поступать вода. Процесс добавления воды придётся прекратить, когда верхняя граница масла в правом колене достигнет верха колена. Условие равенства давлений на уровне соединительной трубки даёт:

$$(2h + x) \cdot 0,8\rho = \rho h + 0,8\rho h \Rightarrow x = 0,25h.$$

Следовательно, воды удалось налить $4,25 Sh$.



6 Шарик по окружности на нити

Металлический шарик подвешен к потолку на нерастяжимой нити. Шарик вращается по окружности, лежащей в горизонтальной плоскости, с постоянной по модулю скоростью $v_1 = 2,5$ м/с, так что нить всегда составляет угол $\alpha = 30^\circ$ с вертикалью. Затем скорость шарика увеличили, и нить стала составлять угол $\beta = 45^\circ$ с вертикалью. Найдите модуль v_2 новой скорости шарика.

Подсказка

Запишите второй закон Ньютона для шарика по вертикали и по радиусу окружности, исключите силу натяжения и выразите v^2 через длину нити и угол.

Ответ

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}} \approx 3,9 \text{ м/с}.$$

Решение

Запишем 2-й закон Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси соответственно:

$$T \cos \alpha = mg, \quad T \sin \alpha = m \frac{v_1^2}{l \sin \alpha},$$

где l — длина нити. Отсюда получаем:

$$v_1^2 = gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha} \Rightarrow v_2 = v_1 \sqrt{\frac{\sin \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}} \approx 3,9 \text{ м/с}.$$

7 Сотня шариков в воде

В теплоизолированном сосуде находится вода при температуре $t_0 = 10,0^\circ\text{C}$. Одинаковые шарики (их количество $n = 100$) нагревают до температуры $\theta = 60,0^\circ\text{C}$. Затем один шарик опускают в воду. Когда наступает тепловое равновесие, шарик вынимают и заменяют его вторым и так далее. Какой станет температура воды после того, как из неё достанут последний сотый шарик? Теплоёмкость одного шарика составляет $\alpha = 0,01$ части от теплоёмкости сосуда с водой. Количество воды в сосуде всё время остаётся постоянным.

Подсказка

Составьте уравнение теплового баланса для первого шарика и посмотрите, как связаны температуры воды после соседних погружений.

Ответ

$$t_{100} \approx 41,5^\circ\text{C}.$$

Решение

Запишем уравнение теплового баланса после погружения первого шарика:

$$C(t_1 - t_0) = C_{\text{ш}}(\theta - t_1) = \alpha C(\theta - t_1) \Rightarrow t_1 = \theta + \frac{1}{1 + \alpha}(t_0 - \theta) \approx 10,5^\circ\text{C},$$

где C — теплоёмкость сосуда с водой, $C_{\text{ш}}$ — теплоёмкость шарика, t_1 — установившаяся температура после погружения первого шарика.

Уравнение теплового баланса при втором погружении:

$$C(t_2 - t_1) = C_{\text{ш}}(\theta - t_2) = \alpha C(\theta - t_2) \Rightarrow t_2 = \theta + \frac{1}{1 + \alpha}(t_1 - \theta) = \theta + \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)^2 (t_0 - \theta) \approx 11,0^\circ\text{C}.$$

Проделав аналогичные действия n раз, получаем:

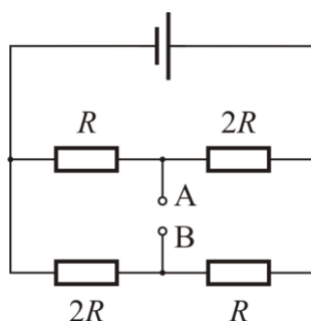
$$t_n = \theta + \frac{1}{1 + \alpha}(t_{n-1} - \theta) = \theta + \left(\frac{1}{1 + \alpha}\right)^n (t_0 - \theta).$$

Значит,

$$t_{100} \approx 41,5^\circ\text{C}.$$

8 Мост с вольтметром и амперметром

Из идеального источника напряжения и четырёх резисторов собрана цепь, схема которой показана на рисунке. Когда между клеммами A и B подключили идеальный вольтметр, он показал напряжение $U = 4$ В. Когда вместо вольтметра подключили идеальный амперметр, его показания составили $I = 30$ мА. Затем вместо амперметра между клеммами A и B подключили ещё один резистор сопротивлением R . Найдите силу тока через этот резистор.



Подсказка

По показанию вольтметра найдите напряжение источника, по показанию амперметра — R , а затем для схемы с резистором между A и B запишите правило Кирхгофа для потенциалов узлов A и B .

Ответ

$$I_R = \frac{1}{7} \frac{\varepsilon}{R} \approx 17 \text{ мА (при этом } \varepsilon = 12 \text{ В, } R = 100 \text{ Ом)}.$$

Решение

При подключении идеального вольтметра (можно считать, что ток через него не течёт) токи через сопротивления $2R$ и R (справа) одинаковы и равны $I_0 = \frac{\varepsilon}{3R}$, где ε — напряжение идеального источника. Тогда:

$$U = 2R \cdot I_0 - R \cdot I_0 = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon = 3U = 12 \text{ В.}$$

При подключении идеального амперметра (можно считать, что напряжение на нём равно нулю) токи через сопротивления R и $2R$ равны соответственно:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{2 \cdot \frac{2}{3}R} \cdot \frac{2R}{R + 2R} = \frac{\varepsilon}{2R} \quad \text{и} \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{2 \cdot \frac{2}{3}R} \cdot \frac{R}{R + 2R} = \frac{\varepsilon}{4R}.$$

Тогда из закона сохранения заряда следует:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\varepsilon}{2R} - \frac{\varepsilon}{4R} = \frac{\varepsilon}{4R} \Rightarrow R = \frac{3U}{4I} = 100 \text{ Ом.}$$

Пусть потенциал левого узла равен нулю, тогда потенциал правого узла равен $\varepsilon = 12$ В. Потенциал точки A обозначим φ_A , а потенциал точки B — φ_B . Тогда из первого правила Кирхгофа следует:

$$\frac{\varphi_A}{R} + \frac{\varphi_A - \varphi_B}{R} + \frac{\varphi_A - \varepsilon}{2R} = 0, \quad \frac{\varphi_B}{2R} + \frac{\varphi_B - \varphi_A}{R} + \frac{\varphi_B - \varepsilon}{R} = 0.$$

Откуда получаем: $\varphi_A = \frac{9}{21}\varepsilon$, $\varphi_B = \frac{12}{21}\varepsilon$. Окончательный ответ:

$$I_R = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{R} = \frac{1}{7} \cdot \frac{\varepsilon}{R} \approx 17 \text{ мА}.$$