

МОШ, 2015/16, отборочный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Лёд с дробинкой в закрытом баке

В герметично закрытом баке находится вода при температуре 0°C . В воде плавает кусок льда массой 1 кг , в который вмёрзла свинцовая дробинка массой 100 г . Какое количество теплоты нужно подвести к содержимому бака, чтобы лёд с дробинкой затонули? Чему будет равна масса льда в момент, когда лёд с дробинкой начнут тонуть? Как изменится уровень воды в баке после того, как лёд с дробинкой утонут?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1,0\text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,9\text{ г/см}^3$, плотность свинца $\rho_{\text{с}} = 11,3\text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335\text{ кДж/кг}$. Дробинка находится в середине куска льда и не отрывается от него.

Подсказка

Лёд с дробинкой начнёт тонуть, когда их средняя плотность сравняется с плотностью воды. Сколько льда к этому моменту должно растаять? Для уровня воды сравните силу давления на дно до и после.

Ответ

Нужно подвести $Q \approx 60,3\text{ кДж}$; масса льда в момент начала погружения $M_1 \approx 820\text{ г}$; уровень воды понизится.

Решение

Когда средняя плотность оставшегося льда и дробинки станет больше плотности воды, дробинка начнёт тонуть, т. е.

$$\frac{M_1 + m}{V} = \frac{M_1 + m}{\frac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m}{\rho_{\text{с}}}} = \rho_{\text{в}},$$

следовательно,

$$M_1 = m \frac{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}}) \rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \rho_{\text{с}}} \approx 820\text{ г},$$

где M_1 — масса оставшегося льда, m — масса дробинки. Растаять должна масса льда $\Delta M = M - M_1$, где M — первоначальная масса льда. Значит, необходимо подвести количество теплоты

$$Q = \lambda \Delta M = \lambda \left(M - m \frac{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}}) \rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}) \rho_{\text{с}}} \right) \approx 60\text{ кДж}.$$

Так как оставшийся лёд с дробинкой опустятся на дно бака и будут давить на него с некоторой силой, то, следовательно, сила давления воды на дно должна уменьшиться, чтобы суммарная сила давления на дно осталась неизменной. Значит, уровень воды понизится.

2 Треугольник из шести металлических частей

Вася решил изготовить плоскую деталь в форме треугольника по следующей схеме. Сначала картонную модель треугольника он разделил медианами на 6 частей. Затем отдельные части заменил копиями, изготовленными из разных металлов. Используемые металлы и их плотности представлены в таблице. Определите возможные варианты средней плотности получившегося треугольника, собранного из отдельных металлических деталей, если все из перечисленных металлов были использованы ровно по два раза. Сколько различных вариантов средней плотности может получиться, если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза? Какая средняя плотность детали в этом случае максимальная, а какая минимальная?

Металл	Плотность, г/см ³
Свинец	11,40
Медь	8,96
Сталь	7,60

Подсказка

Подумайте, как соотносятся площади шести частей, на которые медианы делят треугольник. Тогда средняя плотность зависит только от того, сколько частей сделано из каждого металла.

Ответ

$\bar{\rho} = 9,32 \text{ г/см}^3$; 10 вариантов; $\bar{\rho}_{\min} = 8,46 \text{ г/см}^3$, $\bar{\rho}_{\max} = 10,36 \text{ г/см}^3$.

Решение

Легко доказывается, что медианы делят треугольник на 6 равновеликих частей. Поэтому средняя плотность равна «среднему арифметическому» плотностей используемых металлов:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \frac{S}{6}}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i}{6}.$$

Так как все виды металлов были использованы по два раза, средняя плотность получившегося треугольника принимает только одно возможное значение $\bar{\rho} = \frac{11,40 + 8,96 + 7,60}{3} = 9,32 \text{ г/см}^3$.

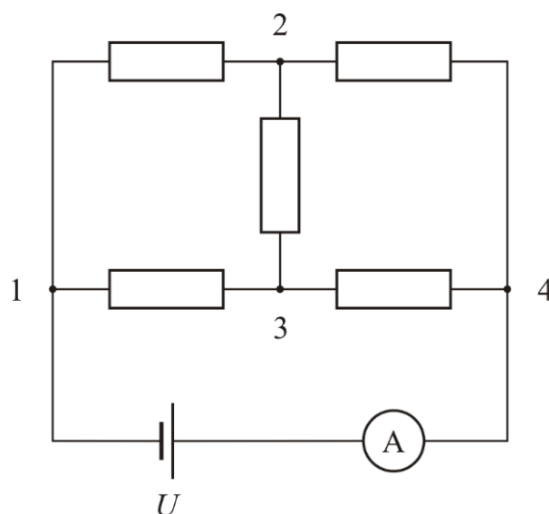
Если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза, то возможных вариантов с различной средней плотностью 10 (каждое число в фигурных скобках соответствует количеству частей треугольника определённой плотности): $\{4, 1, 1\}$ — три варианта, $\{2, 2, 2\}$ — один вариант, $\{3, 2, 1\}$ — шесть вариантов.

$$\bar{\rho}_{\min} = \frac{4 \cdot 7,6 + 8,96 + 11,4}{6} = 8,46 \text{ г/см}^3,$$

$$\bar{\rho}_{\max} = \frac{4 \cdot 11,4 + 7,6 + 8,96}{6} = 10,36 \text{ г/см}^3.$$

3 Мостовая схема и амперметр (11 кл.)

Вася нашёл в ящике своего папы-физика четыре резистора сопротивлением 1 Ом каждый, один резистор сопротивлением 4 Ом, амперметр, батарейку с напряжением $U = 4,5$ В и провода. С использованием этих элементов Вася собрал цепь, схема которой изображена на рисунке (такая схема называется мостовой). Какой из резисторов нужно отключить Васе для того, чтобы показания амперметра изменились сильнее всего? Найдите это изменение показаний амперметра. Вася знает расположение резистора с сопротивлением 4 Ом, но пока вы не расскажете, что ему надо делать, он Вам не покажет, где располагается этот резистор. Батарейку можно считать идеальным источником напряжения, амперметр также считайте идеальным.



Подсказка

Рассмотрите отдельно два случая: резистор 4 Ом стоит в диагонали моста или в одном из плеч. Если в диагонали, то ток по ней сначала не течёт; если в плече, то нужно понять, через какой резистор течёт наибольший ток.

Ответ

Нужно рассмотреть два случая: когда резистор с сопротивлением 4 Ом включён в диагональ моста и когда нет. В первом случае нужно отключить любой резистор с сопротивлением 1 Ом, изменение показаний амперметра равно 2 А. Во втором случае нужно отключить резистор с сопротивлением 1 Ом, подключённый к тому же полюсу батарейки, что и резистор с сопротивлением 4 Ом; изменение показаний $\approx 2,4$ А.

Решение

Если резистор 4 Ом включён в диагональ моста, то его не имеет смысла вытаскивать, потому что показания амперметра при этом не изменятся. То есть в этом случае надо отключить любой резистор 1 Ом. Найдём изменение показаний амперметра в этом случае.

Вначале ток через диагональ моста не течёт и сопротивление всей цепи равно

$$R_1 = \left(\frac{1}{2 \text{ Ом}} + \frac{1}{2 \text{ Ом}} \right)^{-1} = 1 \text{ Ом}.$$

После отключения одного из резисторов сопротивлением 1 Ом полное сопротивление всей цепи будет равно

$$R_2 = 1 \text{ Ом} + \left(\frac{1}{1 \text{ Ом}} + \frac{1}{5 \text{ Ом}} \right)^{-1} = \frac{11}{6} \text{ Ом} \approx 1,83 \text{ Ом}.$$

Абсолютная величина изменения показаний амперметра равна

$$\frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = 2 \text{ A.}$$

Если же резистор 4 Ом подключён, например, к плюсу батарейки (это на самом деле не принципиально), то нужно отключить резистор 1 Ом, который тоже подключён к плюсу батарейки, так как через него течёт самый большой ток. Найдём изменение показаний амперметра в этом случае.

Найдём сопротивление цепи до отключения резистора. Для определённости положим, что резистор сопротивлением 4 Ом подключён между точками 1 и 2 (в силу симметрии сопротивление цепи будет таким же и в 3 остальных случаях). Пусть потенциал в точке 1 $\varphi_1 = 0$, тогда потенциал в точке 4 равен $\varphi_4 = U$. Пусть φ_2 и φ_3 — потенциалы точек 2 и 3 соответственно. Для узлов 2 и 3 запишем условие равенства нулю суммы всех вытекающих токов:

$$\begin{cases} \frac{\varphi_2}{4 \text{ Ом}} + \frac{\varphi_2 - \varphi_3}{1 \text{ Ом}} + \frac{\varphi_2 - U}{1 \text{ Ом}} = 0, \\ \frac{\varphi_3}{1 \text{ Ом}} + \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{1 \text{ Ом}} + \frac{\varphi_3 - U}{1 \text{ Ом}} = 0; \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{9}{4}\varphi_2 - \varphi_3 = 4,5 \text{ В}, \\ -\varphi_2 + 3\varphi_3 = 4,5 \text{ В}; \end{cases} \iff \begin{cases} \varphi_2 \approx 3,1 \text{ В}, \\ \varphi_3 \approx 2,5 \text{ В}. \end{cases}$$

Сила тока в цепи равна

$$I_1 = \frac{\varphi_2}{4 \text{ Ом}} + \frac{\varphi_3}{1 \text{ Ом}} \approx 3,32 \text{ A.}$$

После отключения резистора сила тока в цепи будет равна

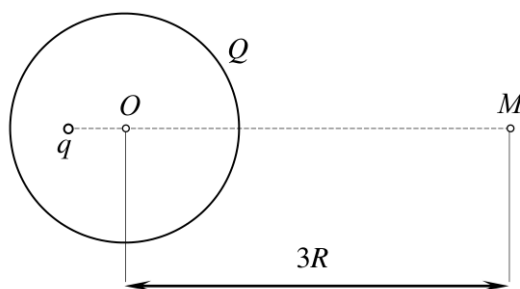
$$I_2 = \frac{U}{4 \text{ Ом} + \frac{2}{3} \text{ Ом}} \approx 0,96 \text{ A.}$$

Абсолютная величина изменения показаний амперметра равна

$$I_1 - I_2 \approx 2,4 \text{ A.}$$

4 Заряд внутри проводящей сферы

Внутри проводящей сферы радиусом R , несущей заряд Q , на расстоянии $R/2$ от её центра O находится точечный заряд q . Найдите потенциал φ в точке M . Точка M , центр сферы O и заряд q лежат на одной прямой. Найдите заряды внутренней и внешней поверхностей сферы. Распределён ли заряд на внутренней поверхности равномерно или неравномерно? А на внешней? Качественно изобразите вид силовых линий электрического поля.



Подсказка

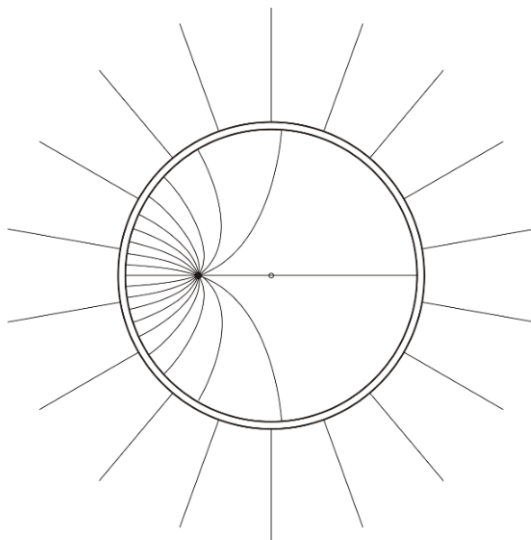
Что происходит с полем внутри толщи проводника? Подумайте, какой заряд должен выступить на внутренней поверхности, чтобы поле в металле было нулевым, и что останется на внешней. Как выглядит поле снаружи?

Ответ

На внутренней поверхности сферы заряд $-q$ распределён неравномерно, на внешней поверхности заряд $Q + q$ распределится равномерно; $\varphi = k \frac{Q + q}{3R}$. Качественная картина силовых линий показана на рисунке в решении (направление силовых линий не указано, поскольку неизвестны знаки зарядов).

Решение

Толща проводника экранирует для наружной области поле, имеющееся внутри сферы, поэтому, хотя на внутренней поверхности сферы заряд $-q$ распределён неравномерно, на внешней поверхности заряд $Q + q$ распределится равномерно. Данная задача эквивалентна случаю, если мы внутренность сферы со всем её «содержимым» заменим сплошным проводником, оставив на поверхности заряд $Q + q$ (так можно сделать, потому что система зарядов на внутренней поверхности сферы вместе с точечным зарядом q вне сферы поля не создаёт).



5 Взрыв снаряда

Закреплённая пушка, установленная на горизонтальной поверхности земли, стреляет под углом α к горизонту, причём снаряды вылетают из пушки с начальной скоростью v_0 . После первого выстрела снаряд упал на расстоянии L от пушки. Второй выстрел оказался неудачным, и на некоторой высоте снаряд разорвался на два осколка массами m и $2m$. Первый, лёгкий осколок, упал на землю на расстоянии $L/2$ от пушки, а второй осколок в момент падения первого осколка находился строго над ним. Определите расстояние s между осколками к моменту падения на землю первого осколка. Получите ответ в общем виде и в частном случае: $\alpha = 60^\circ$, $v_0 = 80$ м/с, $m = 5$ кг, $g = 10$ м/с².

Подсказка

Куда «полетит» центр масс осколков, пока нет внешних сил, кроме тяжести? Где он находится в тот момент, когда осколки оказались на одной вертикали?

Ответ

$s = \frac{3}{4} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}$, при заданных числах $s = 360$ м; горизонтальные составляющие скоростей осколков после разрыва одинаковы: $v_{1x} = v_{2x} = v_0 \cos \alpha = 40$ м/с.

Решение

Центр масс двух осколков «полетит» по той же параболической траектории, по которой двигался снаряд при первом выстреле: его ускорение по теореме о движении центра масс определяется суммой всех сил тяжести, приложенных к осколкам, и общей их массой, т. е. тем же уравнением, что и движение целого снаряда. Как только первый осколок ударится о землю, к внешним силам — силам тяжести — добавится сила реакции земли, и движение центра масс исказится. Но в нашем случае необходимо найти расстояние s между двумя осколками к моменту падения первого осколка, когда второй находился строго над ним, а это означает, что осколки и центр масс будут лежать на одной вертикали. К этому моменту центр масс системы находится на расстоянии $L/2$ от пушки и на высоте

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 240 \text{ м.}$$

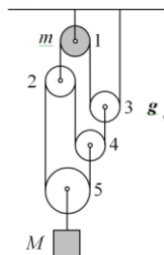
Значит, расстояние между двумя осколками к моменту падения первого осколка равно

$$s = \frac{3}{2} H = \frac{3}{2} \cdot \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 360 \text{ м.}$$

Так как второй осколок к моменту падения первого находился строго над ним, следовательно, горизонтальные составляющие скорости осколков после разрыва снаряда равны: $v_0 \cos \alpha = 40$ м/с.

6 Ускорения блоков

Найдите величины и направления ускорений осей всех блоков, изображённых на рисунке. Массы бруска и верхнего блока равны соответственно M и m . Остальные блоки невесома, нить также невесома и нерастяжима. Трение в осях блоков пренебрежимо мало. Нити по блокам не проскальзывают, не лежащие на блоках участки нитей вертикальны. В начальный момент система покоилась.



Подсказка

Невесомый блок не может нести ненулевую разность натяжений, а к невесомому блоку 4 прикреплена нить от оси блока 5. Выясните, какие нити не натянуты, а затем запишите связь координат блоков через длину нерастяжимой нити.

Ответ

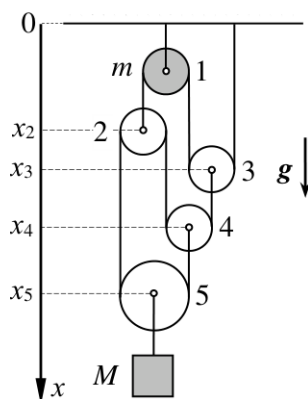
$a_1 = a_2 = a_3 = 0$, $a_5 = g$, $a_4 = -2g$ (ось x направлена вниз, т. е. ось блока 4 движется вверх с ускорением $2g$); $\omega_1 = \omega_3 = 0$; блок 4 вращается по часовой стрелке, блоки 2 и 5 — против.

Решение

Поскольку блок 4 невесом, сила натяжения нижней нити (прикреплённой к оси блока 5) равна нулю, и $a_5 = g$. Из невесомости блоков 2 и 3 следует равенство нулю силы натяжения также и верхней нити, перекинутой через блоки 1 и 3. Стало быть, массивный блок 1 вращаться не будет, и положения блоков 2 и 3 будут неизменными. Блок 3, очевидно, вращаться тоже не будет. Для определения ускорения оси блока 4 и направлений вращения блоков 2, 4 и 5 выразим длину l нити, перекинутой через блоки 2, 4 и 5, через координаты соответствующих блоков:

$$l = x_4 - x_3 + x_4 - x_2 + x_5 - x_2 + x_5 - x_4 + \delta = -2x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + \delta,$$

где δ — сумма длин полуокружностей блоков 2, 4 и 5, а x_2 и x_3 постоянны.



Дважды дифференцируя это равенство по времени, получим:

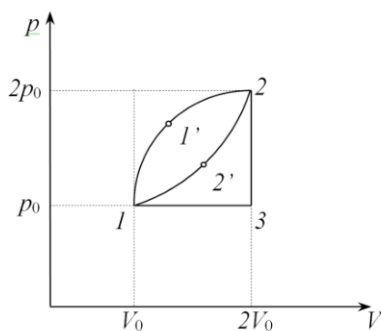
$$\ddot{x}_4 + 2\ddot{x}_5 = 0,$$

откуда

$$\ddot{x}_4 = -2\ddot{x}_5 = -2g.$$

7 КПД цикла с дугой окружности

А) Определите КПД η циклического процесса 11'231, который совершается с одноатомным идеальным газом. pV -диаграмма цикла изображена на рисунке. Кривая 11'2 на диаграмме — четверть дуги окружности (при соответствующем выборе масштабов). Объём газа в цикле меняется в диапазоне от V_0 до $2V_0$, давление меняется в диапазоне от p_0 до $2p_0$. Минимальная температура газа равна $T_0 = 120$ К, а количество вещества составляет $\nu = 1$ моль. Универсальная газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(моль·К).



Б) Разделим данный цикл некоторой дугой 12'2 так, как показано на рисунке. КПД цикла 12'231 равен η_1 . Определите КПД цикла 11'22'1.

Подсказка

Работу за цикл найдите как долю площади прямоугольника $p_0 V_0$. Для пункта Б запишите от-
данное тепло через КПД и подумайте, какое тепло в трёх циклах одно и то же.

Ответ

$$\text{А) } \eta = \frac{\pi}{\pi + 22} \approx 12,5 \% \text{ (работа за цикл } A = \frac{\pi}{4} p_0 V_0 \approx 0,78 \text{ кДж); Б) } \eta_2 = \frac{\eta - \eta_1}{1 - \eta_1} = \frac{\frac{\pi}{\pi + 22} - \eta_1}{1 - \eta_1}.$$

Решение

А) Площадь прямоугольника, в который вписан данный цикл, соответствует работе $p_0 V_0$ (при данном выборе масштабов этот прямоугольник выглядит как квадрат). Работа, которую совершил газ за цикл 11'231, во столько раз меньше $p_0 V_0$, во сколько раз площадь четверти круга меньше площади квадрата. Поэтому

$$A = p_0 V_0 \left(\frac{\frac{1}{4} \pi R^2}{R^2} \right) = \frac{1}{4} \pi p_0 V_0 = \frac{1}{4} \pi \nu R T_0 \cong 0,78 \text{ кДж.}$$

КПД цикла 11'231 посчитаем по формуле $\eta = \frac{A}{A + |Q_-|}$. Газ отдавал теплоту в процессе 231. По первому началу термодинамики

$$|Q_-| = \frac{c_V}{R} (4p_0 V_0 - 2p_0 V_0) + \frac{c_p}{R} (2p_0 V_0 - p_0 V_0) = p_0 V_0 \left(2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \right) = \frac{11}{2} p_0 V_0 \cong 5,5 \text{ кДж.}$$

Тогда

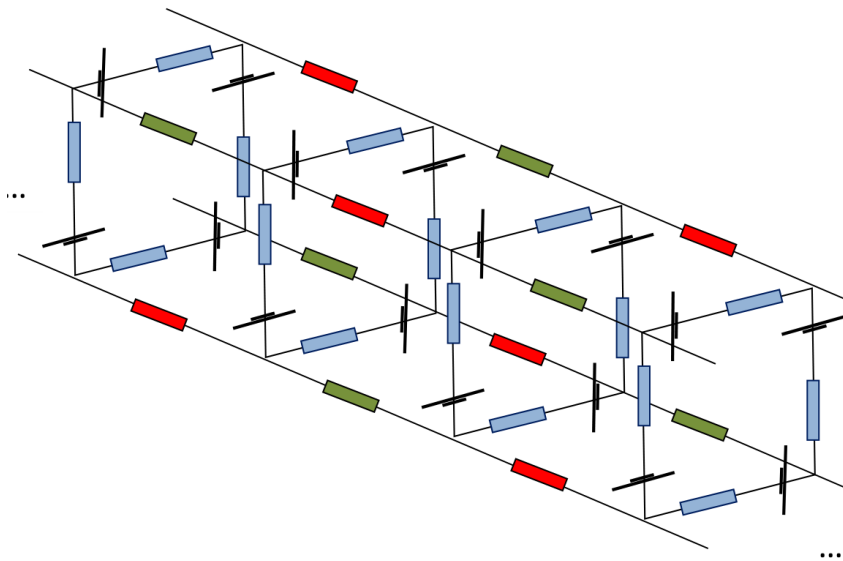
$$\eta = \frac{A}{A + |Q_-|} = \frac{\frac{1}{4} \pi p_0 V_0}{\frac{1}{4} \pi p_0 V_0 + \frac{11}{2} p_0 V_0} = \frac{\pi}{\pi + 22} \cong 12,5 \%.$$

Б) Из формулы для КПД следует: $|Q_-| = Q_+(1 - \eta)$. Тогда для цикла 11'22'1: $|Q_{22'1}| = Q_{11'2}(1 - \eta_2)$. Для цикла 12'231: $|Q_{231}| = Q_{12'2}(1 - \eta_1)$. Для цикла 11'231: $|Q_{231}| = Q_{11'2}(1 - \eta)$. Значит, $(1 - \eta_1)(1 - \eta_2) = 1 - \eta$, откуда

$$\eta_2 = \frac{\eta - \eta_1}{1 - \eta_1} = \frac{\frac{\pi}{\pi + 22} - \eta_1}{1 - \eta_1}.$$

8 Цепочка проволочных кубов с источниками

Имеется цепочка, которая состоит из 2015 проволочных кубов, содержащих одинаковые источники напряжения с внутренними сопротивлениями r и внешние нагрузки R_1 (синие), R_2 (красные) и R_3 (зелёные), соединённых так, как показано на рисунке. При каком значении сопротивления R_1 на внешних нагрузках будет выделяться максимальная суммарная мощность (значения R_2 и R_3 красных и зелёных резисторов известны)? Получите ответ в общем виде и в частном случае $\varepsilon = 2$ В, $r = 1$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Изобразите график зависимости мощности, выделяющейся на синем резисторе, от его сопротивления $P_c(R_1)$.



Подсказка

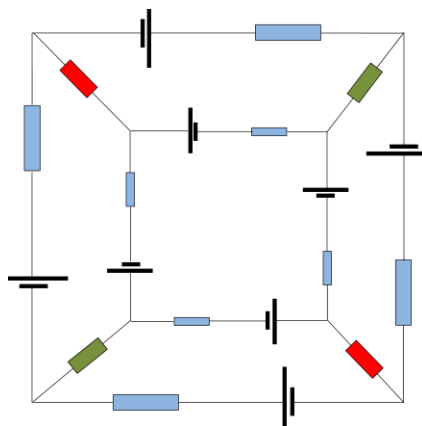
Выделите два соседних контура с источниками и посмотрите на симметрию: течёт ли ток по красным и зелёным резисторам, соединяющим эти контуры? Что тогда остаётся от схемы?

Ответ

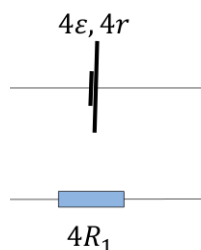
В общем виде: $R_1 = r$, мощность на красных и зелёных нагрузках $P_k = P_3 = 0$ Вт, $P_c = \frac{\varepsilon^2}{4R_1}$; в частном случае $R_1 = r = 1$ Ом и $P_c = \frac{\varepsilon^2}{4R_1} = 1$ Вт.

Решение

Если рассмотреть два любых соседних контура (с источниками), которые соединены красными и зелёными нагрузками так, как показано на рисунке, то из симметрии следует, что по этим нагрузкам ток не течёт.



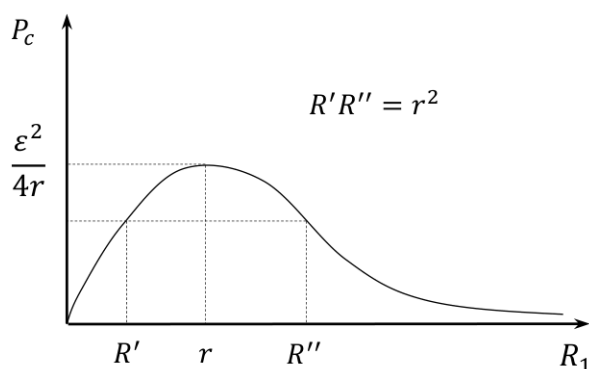
Следовательно, во всей цепочке ток через красные и зелёные нагрузки течь не будет. Значит, $P_K = P_3 = 0$ Вт. Остаётся рассмотреть схему, изображённую на рисунке.



На нагрузке $4R_1$ выделяется мощность, равная

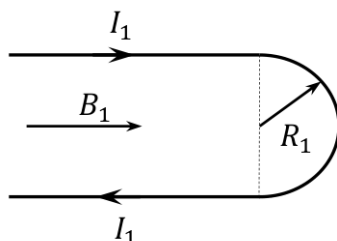
$$P_c = \left(\frac{\varepsilon}{r + R_1} \right)^2 R_1.$$

Если изучить функцию $P_c(R_1)$, то оказывается, что максимальное значение эта функция принимает при $r = R_1 = 1$ Ом. При этом на одном синем резисторе будет выделяться мощность, равная $P_c = \frac{\varepsilon^2}{4R_1} = 1$ Вт. Качественно график $P_c(R_1)$ выглядит следующим образом:

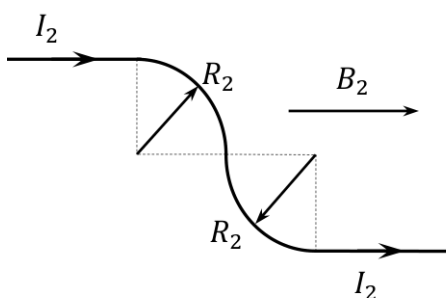


9 Сила Ампера на проводе с дугами

А) Проводник с током I_1 , состоящий из двух параллельных участков, соединённых проволоочной полуокружностью радиусом R_1 , помещён в однородное магнитное поле индукцией B_1 , направленное вдоль параллельных участков провода (см. рис.). Определите модуль силы, с которой магнитное поле действует на этот провод с током.



Б) Решите задачу в случае, когда провод состоит из двух параллельных участков, которые соединены двумя проволоочными четвертями окружностей радиусом $R_2 = 10$ см, как показано на рисунке. Ток в проводе $I_2 = 30$ А, вектор индукции однородного магнитного поля $B_2 = 1$ Тл направлен вдоль параллельных участков провода.



Подсказка

Какая сила действует на участки провода, параллельные полю? Разбейте дугу на малые элементы тока и просуммируйте силы: чему равна сумма векторов $\Delta \vec{l}_i$ для дуги?

Ответ

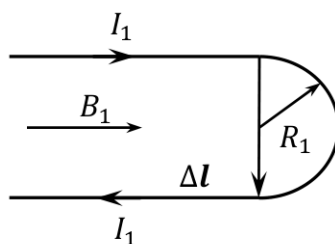
А) $F_1 = 2I_1 R_1 B_1$; Б) $F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2} R_2 \cdot B_2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 6$ Н.

Решение

А) На провода, параллельные вектору индукции магнитного поля $\vec{B}$, не действует сила Ампера. Разобьём проволоочную полуокружность на элементы тока. На каждый элемент тока действует сила Ампера, равная $\vec{F}_i = I [\Delta \vec{l}_i \times \vec{B}]$. Сила, действующая на весь проводник, равна векторной сумме сил, действующих на элементы тока:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i I [\Delta \vec{l}_i \times \vec{B}] = I \left[\sum_i \Delta \vec{l}_i \times \vec{B} \right] = I [\Delta \vec{l} \times \vec{B}],$$

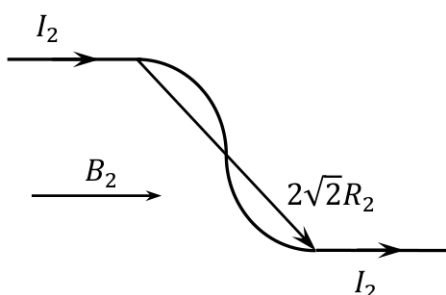
где $\Delta \vec{l}$ — вектор, соединяющий начальную и конечную точки проволоочной полуокружности.



Окончательно получаем:

$$F_1 = I_1 \cdot 2R_1 \cdot B_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = 2I_1 R_1 B_1.$$

Б) Аналогично предыдущему пункту получаем (см. рис.):



$$F_2 = I_2 \cdot 2\sqrt{2} R_2 \cdot B_2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 30 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 0,1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6 \text{ Н.}$$

10 Ракета и снаряд: взаимно перпендикулярные скорости

Ракета удаляется от поверхности Земли с постоянной скоростью $v_0 = 200 \text{ м/с}$, направленной строго вертикально. Из неподвижного орудия под углом α к горизонту выпускается снаряд с такой же по величине начальной скоростью v_0 . В каком диапазоне должен лежать угол α , чтобы в системе отсчёта, движущейся поступательно вместе со снарядом, скорости ракеты и орудия хотя бы в какой-то момент времени были взаимно перпендикулярны? Сопротивлением воздуха пренебречь. Поверхность Земли считать плоской.

Подсказка

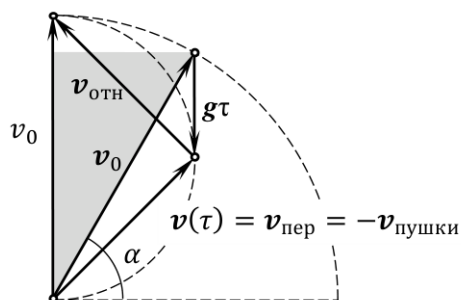
В системе отсчёта снаряда скорость орудия равна минус скорости снаряда, а ракеты — скорость ракеты минус скорость снаряда. Постройте векторную диаграмму: как меняется скорость снаряда со временем и когда два вектора могут оказаться перпендикулярными?

Ответ

$60^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ (при $\alpha = 60^\circ$ перпендикулярность достигается через $\tau = 7,5 \text{ с}$).

Решение

Из рисунка видно, что угол α должен лежать в диапазоне от 60° (включительно) до 90° (не включительно) (на рисунке диапазон изображён серой штриховкой).



При $\alpha = 60^\circ$ имеем

$$g\tau = v_0 \sin \alpha - \frac{v_0}{2} = v_0 \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \right),$$

откуда

$$\tau = \frac{v_0}{g} \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \right) = \frac{v_0}{2g} (\sqrt{3} - 1) = 7,5 \text{ c.}$$

11 Ворона на доске в воде

Посередине длинной доски массой $M = 4 \text{ кг}$ сидит ворона. Доска при этом на три четверти погружена в воду. После того как ворона пересела на один из её концов, верхний край доски с этого конца опустился как раз до уровня воды (нижний край доски по-прежнему полностью погружен в воду). Найдите массу вороны.

Подсказка

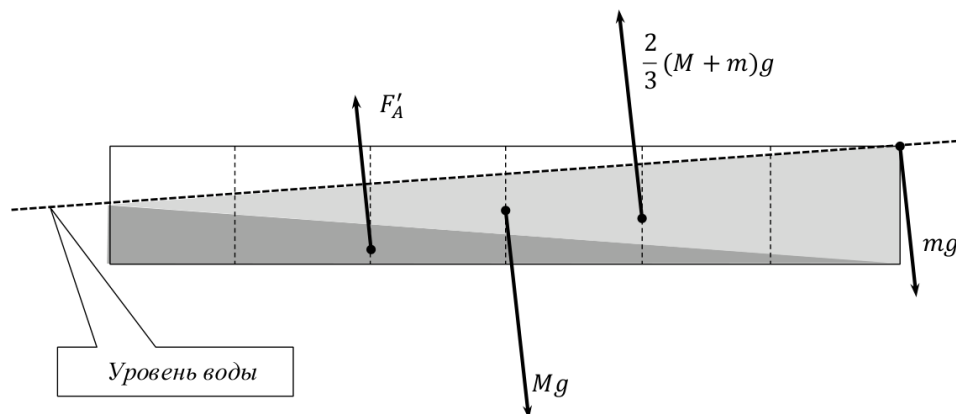
Доска длинная, поэтому наклон мал, и погружённый объём можно разбить на две части с известными точками приложения силы Архимеда. Запишите уравнение моментов относительно подходящей точки.

Ответ

$$m = \frac{M}{8} = 0,5 \text{ кг.}$$

Решение

Так как длина доски много больше её толщины, угол наклона доски очень мал. На рисунке изображены силы для случая, когда ворона пересела на один из концов доски.



Светло-серая часть доски имеет вдвое меньший объём, чем у всей доски, значит, на эту часть действует сила Архимеда, равная $\frac{2}{3}(M + m)g$ (так как в первом случае, когда ворона сидела посередине доски, доска была на три четверти погружена в воду), а точка приложения этой силы расположена на расстоянии трети доски от её правого конца (см. рисунок). Точка приложения силы Архимеда, действующей на оставшуюся погружённую часть доски, отстоит от левого конца также на треть. Запишем уравнение моментов относительно точки приложения силы F'_A :

$$Mg \cdot \frac{1}{6}l + mg \cdot \frac{4}{6}l - \frac{2}{3}(M + m)g \cdot \frac{1}{3}l = 0 \Rightarrow m = \frac{M}{8} = 0,5 \text{ кг},$$

где l — длина доски, m — масса вороны.

Запишем уравнение моментов относительно точки приложения силы $\frac{2}{3}(M + m)g$ (см. рисунок):

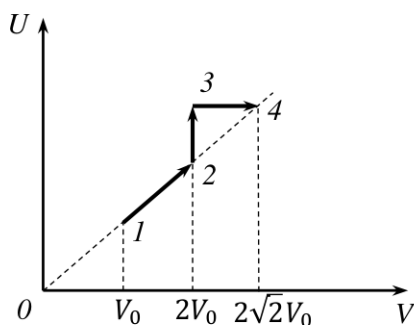
$$Mg \cdot \frac{1}{6}l - mg \cdot \frac{1}{3}l - F'_A \cdot \frac{1}{3}l = 0 \Rightarrow F'_A = \frac{3}{8}Mg.$$

Значит, суммарная сила Архимеда, действующая на доску, равна

$$F_A = F'_A + \frac{2}{3}(M + m)g = \frac{3}{8}Mg + \frac{2}{3}(M + m)g = \frac{27}{24}Mg \cong 44 \text{ Н}.$$

12 Внутренняя энергия газа от объёма

Зависимость внутренней энергии идеального газа от объёма указана на рисунке. На каком из участков: 1–2, 2–3 или 3–4 — совершённая работа максимальна?



Подсказка

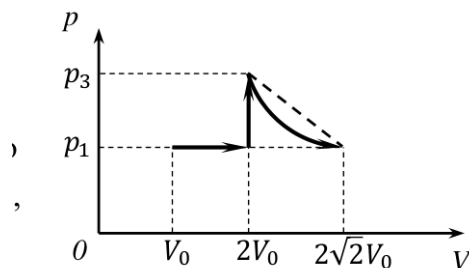
Перерисуйте процесс на pV -диаграмму. Какой вид имеет каждый участок (изобара, изохора, изотерма)? Работу на участке 3–4 оцените сверху площадью подходящей трапеции.

Ответ

Работа максимальна на участке 1–2.

Решение

Изобразим процесс на pV -диаграмме.



Работа газа на участке 1–2 (изобара) равна $A_{12} = p_1 V_0$, а на участке 2–3 (изохора) равна нулю. Работу на изотермическом участке 3–4 оценим сверху как площадь трапеции (площадь под отрезком жирной штриховой линии):

$$A_{34} < (p_1 + p_3) (\sqrt{2} - 1) V_0.$$

Из уравнения состояния для точек 3 и 4 находим, что $p_3 = \sqrt{2} p_1$. Стало быть, $A_{34} < p_1 V_0$. Следовательно, работа газа максимальна на участке 1–2.

13 Три шарика в космосе

Три маленьких шарика находятся в космосе в углах правильного треугольника со сторонами длиной R . Шарика имеют массы $m, 100m, 100m$. Их электрические заряды равны соответственно $100q, q, q$. В начальный момент скорости шариков равны нулю. Какими будут скорости этих шариков через очень большое время?

Подсказка

Лёгкий шарик разгоняется гораздо быстрее тяжёлых. Подумайте, как можно разделить процесс на два этапа и записать закон сохранения энергии для каждого.

Ответ

Скорость шарика с зарядом $100q$: $v_1 = \frac{10q}{\sqrt{\pi\epsilon_0 m R}}$; скорости шариков с зарядами q : $v_2 = \frac{q}{20\sqrt{\pi\epsilon_0 m R}}$.

Решение

В начальном состоянии энергия взаимодействия шариков равна

$$W_1 = \frac{1}{2} \left(q \left[k \frac{100q}{R} + k \frac{q}{R} \right] + q \left[k \frac{100q}{R} + k \frac{q}{R} \right] + 100q \left[k \frac{q}{R} + k \frac{q}{R} \right] \right) = 201 k \frac{q^2}{R}$$

(шарики маленькие, следовательно, их собственная энергия в процессе движения не поменяется).

Так как масса шарика с зарядом $100q$ много меньше масс двух остальных шариков, он улетит на далёкие расстояния очень быстро (два остальных не успеют разогнаться), поэтому из закона сохранения энергии получаем

$$W_1 = \frac{mv_1^2}{2} + k \frac{q^2}{R} \Rightarrow v_1 = \frac{10q}{\sqrt{\pi\epsilon_0 m R}},$$

где v_1 — скорость шарика с зарядом $100q$.

Запишем закон сохранения энергии для двух оставшихся шариков:

$$k \frac{q^2}{R} = 2 \cdot \frac{100 m v_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{q}{20 \sqrt{\pi \epsilon_0 m R}},$$

где v_2 — скорость шариков с зарядами q .

14 Бусинка на стержне в невесомости

Гладкий стержень длины L и массы M находится в невесомости. На стержень надета маленькая бусинка, масса которой гораздо меньше массы стержня. Определите период малых колебаний бусинки вблизи центра стержня. Гравитационная постоянная равна G .

Подсказка

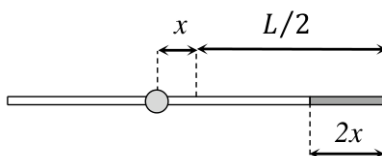
Если бусинка смещена от центра на малое расстояние, часть стержня справа и слева от неё притягивает её с одинаковой силой. Какой остаток стержня даёт ненулевую результирующую?

Ответ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^3}{8GM}} = \pi \sqrt{\frac{L^3}{2GM}}.$$

Решение

Когда бусинка отклонена от положения равновесия на малое расстояние x , то в силу симметрии со стороны «белой» части стержня не действует сил (см. рисунок), а со стороны кусочка длиной $2x$ действует сила, равная $G \frac{m \left(\frac{2x}{L} M \right)}{(L/2)^2}$, где m — масса бусинки.



Запишем второй закон Ньютона для бусинки:

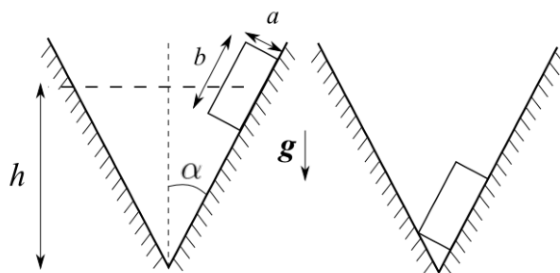
$$m \ddot{x} = -G \frac{m \left(\frac{2x}{L} M \right)}{(L/2)^2} \Rightarrow \ddot{x} + \left(G \frac{8M}{L^3} \right) x = 0,$$

откуда получаем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L^3}{8GM}} = \pi \sqrt{\frac{L^3}{2GM}}.$$

15 Брусок между двумя плоскостями

Между двумя плоскостями, составляющими угол 2α , на поверхности одной из плоскостей находится брусок длиной b и высотой a . В начальный момент времени центр масс бруска находится на высоте h от линии пересечения плоскостей. Брусок отпускают без начальной скорости, он соскальзывает и касается своим ребром другой плоскости. Найдите скорость бруска в этот момент. Линия пересечения плоскостей параллельна поверхности земли. Трением пренебречь.



Подсказка

Найдите, на какое расстояние вдоль плоскости сместился центр масс бруска, и воспользуйтесь законом сохранения энергии (или найдите ускорение вдоль плоскости).

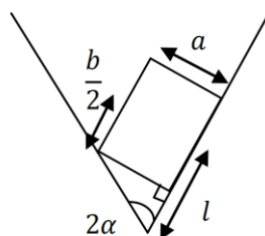
Ответ

$$v = \sqrt{2g \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right)}.$$

Решение

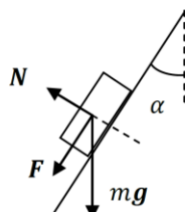
Сначала нужно определить перемещение центра масс бруска. Из геометрии находим, что начальная координата центра масс бруска относительно ребра двугранного угла $l_0 = \frac{h}{\cos \alpha}$, а конечная (см. рисунок)

$$l = \frac{b}{2} + \frac{a}{\operatorname{tg} 2\alpha}.$$



1-й способ (динамический). Согласно второму закону Ньютона, ускорение бруска равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \cos \alpha}{m} = g \cos \alpha = 8,5 \text{ м/с}^2.$$



Путь $l_0 - l$ брусок прошёл за время t :

$$l_0 - l = (g \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(l_0 - l)}{g \cos \alpha}} = 0,46 \text{ с.}$$

Скорость бруска в конце пути:

$$v = (g \cos \alpha) \cdot t = \sqrt{2g \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right)}.$$

2-й способ (энергетический). Из-за отсутствия диссипации (трения) полная механическая энергия сохраняется. Поэтому

$$mgh = mgl \cos \alpha + \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = 2g(l_0 - l) \cos \alpha \Rightarrow v = \sqrt{2g \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha - \frac{a \cos \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha} \right)}.$$

16 Маятник с удвоенной скоростью

Математический маятник колеблется с угловой амплитудой $\varphi_0 = 0,1$ рад. В момент прохождения маятником нижней точки своей траектории скорость маятника резко увеличили в 2 раза. Найдите новую угловую амплитуду колебаний φ_1 .

Подсказка

Свяжите скорость в нижней точке с амплитудой через закон сохранения энергии, а потом сделайте то же для удвоенной скорости.

Ответ

$$\varphi_1 = \arccos(4 \cos \varphi_0 - 3) \approx 0,2 \text{ рад.}$$

Решение

Пусть v — скорость маятника в нижней точке траектории. Из закона сохранения энергии

$$\frac{v^2}{2} = gl(1 - \cos \varphi_0) \Rightarrow v = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi_0)} = 0,3 \text{ м/с.}$$

После того как скорость маятника увеличили,

$$2v^2 = gl(1 - \cos \varphi_1).$$

Значит,

$$1 - \cos \varphi_1 = 4(1 - \cos \varphi_0) \Rightarrow \varphi_1 = \arccos(4 \cos \varphi_0 - 3) \approx 0,2 \text{ рад.}$$

17 Диссоциация двухатомного газа

Герметичный сосуд заполнен двухатомным идеальным газом. После значительного повышения температуры часть молекул диссоциировала на атомы, при этом удельная теплоёмкость всего газа возросла на 10 %. Какая часть молекул диссоциировала? Теплоёмкость одного моля двухатомного идеального газа при неизменном объёме $c_V = 2,5R$.

Подсказка

Запишите удельную теплоёмкость смеси через доли массы атомарного и двухатомного газа. Удельные теплоёмкости удобно выразить через молярную массу одноатомного газа.

Ответ

Диссоциировала половина молекул: $\alpha = 0,5$.

Решение

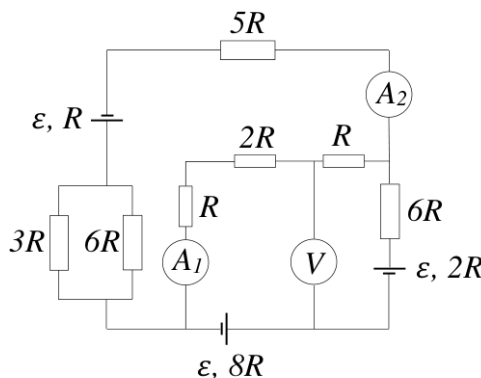
Пусть m — масса всей смеси, α — коэффициент диссоциации, тогда αm — масса диссоциированных молекул. Удельная теплоёмкость одноатомного газа $C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\mu}$, двухатомного $C_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{2\mu}$, где μ — молярная масса одноатомного газа. Удельная теплоёмкость смеси равна

$$C = \alpha C_1 + (1 - \alpha) C_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\mu} \cdot \alpha + \frac{5}{2} \cdot \frac{R}{2\mu} \cdot (1 - \alpha).$$

По условию $C = 1,1 C_2$. Откуда получаем $\alpha = 0,5$.

18 Амперметр в схеме с тремя источниками

В схеме, изображённой на рисунке, определить показание амперметра A_1 . Приборы считать идеальными.



Подсказка

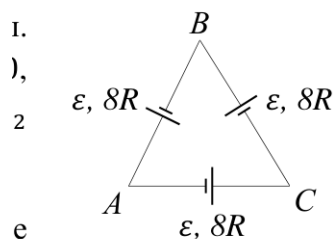
Упростите схему: оставьте точки, к которым подключены элементы с амперметром A_1 и вольтметром, и сравните потенциалы этих точек, используя симметрию трёх одинаковых ветвей.

Ответ

$$I_1 = 0.$$

Решение

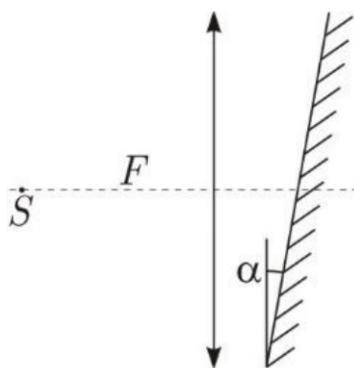
Упростив схему, приходим к картине, изображённой на рисунке, где к точкам A , B и C подключены два резистора с сопротивлениями R , резистор с сопротивлением $2R$, амперметр A_1 и вольтметр (эти элементы не изображены на рисунке).



Из симметрии следует, что потенциалы точек A , B и C равны. Следовательно, показание амперметра A_1 равно $I_1 = 0$, показание вольтметра равно $U_V = 0$, а показание амперметра A_2 равно $I_2 = \frac{\varepsilon}{8R} = 1,25 \text{ A}$.

19 Линза и наклонное зеркало

За собирающей линзой расположено плоское зеркало, причём угол между зеркалом и линзой равен α . На главной оптической оси линзы в фокусе расположен источник света S . Определите, на каком расстоянии от источника света находится его изображение, если фокусное расстояние линзы равно F .



Подсказка

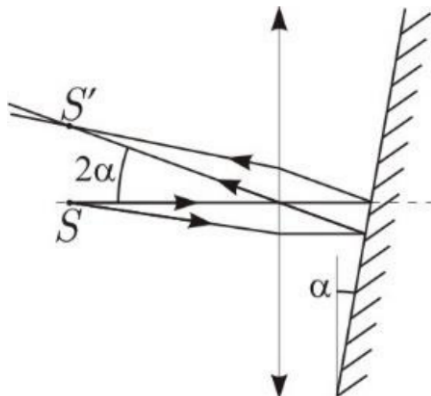
Источник в фокусе даёт за линзой параллельный пучок. Куда повернётся этот пучок после отражения от наклонного зеркала и где он снова соберётся?

Ответ

Расстояние между источником и его изображением равно $F \tan 2\alpha$.

Решение

Так как источник S находится в фокусе, то после линзы лучи от него будут представлять параллельный пучок. Каждый такой луч падает на зеркало под углом падения α , угол отражения также равен α , поэтому угол между отражённым от зеркала лучом и оптической осью будет 2α . Получаем параллельный пучок под углом 2α к оптической оси, который опять должен собраться в фокальной плоскости линзы. Положение точки сбора лучей определяется лучом, проходящим через центр линзы, который не преломляется.



Таким образом, расстояние между источником и его изображением равно $F \operatorname{tg} 2\alpha$.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2015/16, отборочный этап, 11 класс — условия (1), условия (2), условия (3), условия (4), решения (1), решения (2), решения (3), решения (4). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.