

МОШ, 2015/16, отборочный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Грузовик и легковой автомобиль

Из деревни Алексеевка в село Борисово выехал грузовой автомобиль. Через полчаса вслед за ним из Алексеевки выехал легковой автомобиль, также направляющийся в село Борисово. Автомобили следовали по одному и тому же маршруту, грузовой автомобиль двигался с постоянной скоростью 60 км/ч, а легковой автомобиль с постоянной скоростью 80 км/ч. Легковой автомобиль обогнал грузовой на полпути между Алексеевкой и Борисовым. Найдите расстояние между населенными пунктами и времена движения каждого из автомобилей.

Подсказка

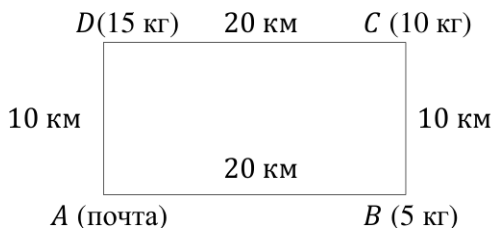
К моменту обгона оба автомобиля проехали одинаковый путь, а грузовик ехал на полчаса дольше. Запишите путь через скорость и время для каждого.

Ответ

Расстояние между населёнными пунктами 240 км; время движения грузового автомобиля 4 ч, легкового — 3 ч.

2 Печкин развозит посылки

Почтальон Печкин из пункта A должен доставить посылки Дяде Фёдору, коту Матроскину и Шарику в три пункта: B , C и D соответственно. Схема всех дорог Простоквашинского района и массы посылок, доставляемых в пункты назначения, указаны на рисунке. С полным грузом Печкин выезжает на спортивном велосипеде из пункта A со скоростью $v = 5$ км/ч. Оставляя посылку в каждом пункте назначения, Печкин может увеличить скорость своего движения на столько километров в час, на сколько килограммов уменьшилась масса доставляемого груза. Например, доставив Дяде Фёдору в пункт B посылку массой 5 кг, Печкин может увеличить скорость своего дальнейшего движения на 5 км/ч. Укажите маршрут, по которому нужно двигаться Печкину, чтобы за наименьшее время доставить все грузы в пункты назначения и вернуться на почту (пункт A). Найдите это время. Почтальон может передвигаться только по дорогам.



Подсказка

Дорог всего две цепочки вокруг прямоугольника, значит, маршрутов лишь два: по часовой и против часовой стрелки. Посчитайте время на каждом участке, учитывая, сколько груза уже роздано.

Ответ

Оптимальный маршрут $ADCBA$. Время движения по нему $t \approx 3 \text{ ч } 54 \text{ мин} \approx 4 \text{ ч}$.

Решение

Необходимо сравнить два маршрута движения. При движении по часовой стрелке получается $t_1 \approx 4 \text{ ч}$, а при движении против часовой стрелки $t_2 \approx 6,3 \text{ ч}$. Получается, что маршрут «Шарик — кот Матроскин — Дядя Фёдор» выгоднее для Печкина.

3 Бумажные разновесы

Из набора гирь («разновесов») Настей были утеряны некоторые миллиграммовые гирьки. Для изготовления временных миллиграммовых разновесов она использовала бумагу из папиного принтера. Помогите Насте вычислить размеры бумажных разновесов прямоугольной формы для замены гирек массами 50 мг, 100 мг, 200 мг (по одному варианту для каждой гирьки). Один квадратный метр бумаги имеет массу 80 г. Какое максимальное число наборов из трёх разновесов прямоугольной формы можно получить из листа бумаги с размерами $20 \times 40 \text{ см}^2$?

Подсказка

Масса листа пропорциональна его площади: найдите, какая площадь бумаги весит 100 мг, а потом выразите площади двух других разновесов через неё. Сравните площадь целого листа с площадью одного набора.

Ответ

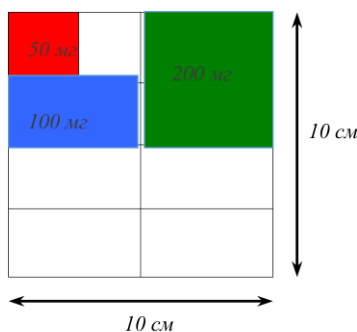
50 мг — $2,5 \text{ см} \times 2,5 \text{ см}$; 100 мг — $5 \text{ см} \times 2,5 \text{ см}$; 200 мг — $5 \text{ см} \times 5 \text{ см}$ (возможны другие варианты). Максимум можно вырезать 18 наборов.

Решение

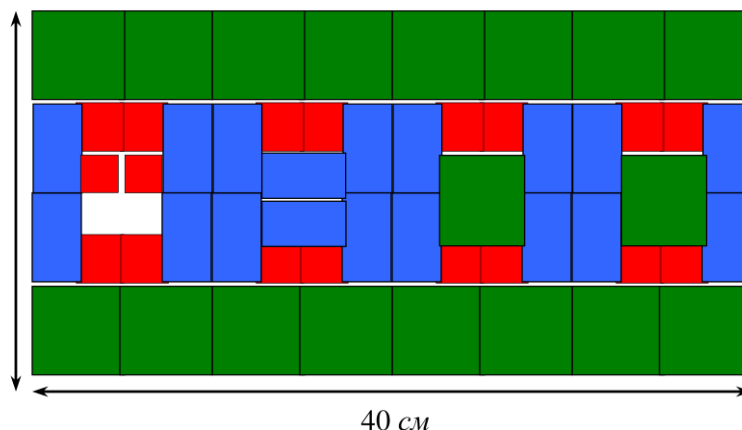
Определим площадь бумаги для изготовления гирьки в 100 мг:

$$S = \frac{0,100 \text{ г}}{80 \text{ г}} \cdot 10^4 \text{ см}^2 = \frac{100}{8} \text{ см}^2.$$

Нужно вырезать квадрат $10 \times 10 \text{ см}^2$ и разрезать его на восемь частей. Размеры для различных гирек показаны на рисунке.



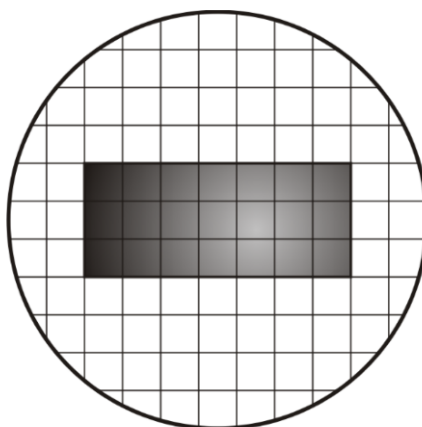
Максимум можно вырезать 18 наборов, в каждом из которых будет по 3 разновеса (50 мг, 100 мг, 200 мг). Пример схемы разрезания представлен на рисунке.



4 Микроскоп с сеткой

Оптический микроскоп состоит из двух основных частей: объектива и окуляра. Изучаемый предмет (объект) помещают перед объективом, тогда за объективом возникает изображение предмета, которое больше самого предмета в некоторое число раз, которое называется увеличением объектива. Это изображение рассматривают через окуляр (от слова «око» — глаз), который в свою очередь также «увеличивает» наблюдаемые через него предметы в некоторое число раз, которое называется увеличением окуляра. Обычно микроскопы имеют несколько объективов с различным увеличением, чтобы экспериментатор имел возможность выбрать увеличение, наиболее удобное для данного опыта.

На рисунке показано видимое через окуляр изображение образца прямоугольной формы, полученное с помощью оптического микроскопа с увеличением объектива $\times 4$ и увеличением окуляра $\times 10$. Для того, чтобы измерять размеры наблюдаемых объектов, между объективом и окуляром в микроскопе помещена тонкая сетка, расстояние между соседними линиями которой равно 0,5 мм.



Чему равно полное увеличение микроскопа? С помощью рисунка определите истинные длины сторон образца. Рассчитайте площадь поверхности образца.

Подсказка

Увеличения объектива и окуляра перемножаются. Сетка стоит между ними, поэтому длины, снятые по сетке, нужно ещё поделить на увеличение объектива.

Ответ

Размеры образца $0,875 \text{ мм} \times 0,375 \text{ мм}$; площадь поверхности образца $\approx 0,33 \text{ мм}^2$; полное увеличение микроскопа 40.

5 Улитка ползёт на Фудзи

Ползи, улитка,
по склону Фудзи
вверх, до самых высот.

Так звучит в русском переводе одно из известных произведений (хайку) японского поэта Кобаяси Иссы (1763–1828). Несмотря на свою немногословность, стихи хайку оставили заметный след в мировой культуре. Высота горы (вулкана) Фудзи составляет 3776 м. Но путь улитки, конечно же, не вертикальный и даже не прямой. Предположим, что её путь в 3,5 раза больше высоты горы. Ползёт улитка по 9 часов каждые сутки с постоянной скоростью 1,6 мм/с, а остальное время отдыхает. Вычислите, сколько суток потребуется улитке, чтобы достичь своей цели. Ответ округлите до целых суток.

Дополнительные задания с кратким ответом (заочный тур, по условию этой задачи). Найдите среднюю скорость улитки за сутки; ответ выразите в мм/с, округлите до первого знака после запятой. Чему равен путь, который улитка проходит за сутки? Ответ выразите в метрах, округлите до первого знака после запятой.

Подсказка

Найдите путь, который улитка проходит за одни сутки, и поделите на него весь путь.

Ответ

255 суток. Средняя скорость за сутки 0,6 мм/с; путь за сутки 51,8 м.

Решение

Весь путь улитки равен: $3776 \cdot 3,5 = 13216 \text{ м}$.

Чтобы найти среднюю скорость улитки за сутки, нужно путь, пройденный за сутки, разделить на время (24 часа). Число секунд в сутках равно $24 \cdot 3600 = 86400$, а число секунд в 9 часах равно $9 \cdot 3600 = 32400$.

Путь, пройденный за сутки, равен $1,6 \cdot 32400 = 51840 \text{ мм} \approx 51,8 \text{ м}$.

Средняя скорость улитки равна $51,84/86400 = 0,0006 \text{ м/с} = 0,6 \text{ мм/с}$.

Чтобы найти число суток, необходимое улитке для достижения своей цели, нужно весь путь разделить на путь, проходимый за одни сутки. Получим: $13216/51,84 \approx 255$ суток.

6 Самолёт и вертолёт встречаются

На учениях самолет и вертолет одновременно вылетают с военного аэродрома в сторону одной и той же цели, расстояние до которой $L = 120$ км и летят вдоль одной прямой. Самолет, быстро выполнив задание, возвращается по прежнему пути назад, и встречает вертолет в момент, когда тот пролетел лишь некоторую часть расстояния до цели. На каком расстоянии от аэродрома встретились самолет и вертолет, если вертолет летел в $n = 5$ раз медленнее самолета? Временем, которое самолёт затрачивает на разворот, можно пренебречь.

Дополнительные задания с кратким ответом (заочный тур, по условию этой задачи). Чему равен суммарный путь, пройденный самолётом и вертолётom к моменту их встречи? Ответ выразите в километрах и округлите до целого. На каком расстоянии от аэродрома будет находиться вертолёт, когда самолёт вернётся на аэродром? Ответ выразите в километрах и округлите до целого.

Подсказка

К моменту встречи самолёт и вертолёт вместе пролетели ровно удвоенное расстояние до цели. Выразите путь самолёта через путь вертолёта.

Ответ

40 км от аэродрома. Суммарный путь к моменту встречи 240 км; когда самолёт вернётся на аэродром, вертолёт будет в 48 км от него.

Решение

Пусть s — расстояние от аэродрома до места встречи (путь вертолёта). Так как вертолёт летел в n раз медленнее самолёта, путь самолёта (до момента встречи) равен ns . Суммарно вертолёт и самолёт совершили путь вдвое больший, чем расстояние от аэродрома до цели. Окончательно получаем:

$$2L = s + ns \Rightarrow s = \frac{2L}{n+1} = 40 \text{ км.}$$

7 Винни-Пух в бочке с мёдом

В бочку объёмом 90 л, которая была на две трети объёма заполнена мёдом, залез Винни-Пух. При этом уровень мёда поднялся до краев и 9 кг меда вытекли наружу. Из бочки осталась торчать только голова Винни-Пуха, объем которой равен одной десятой объёма медведя. Определите массу Винни-Пуха, если его средняя плотность 1000 кг/м^3 . Плотность мёда 1500 кг/м^3 .

Дополнительные задания с кратким ответом (заочный тур, по условию этой задачи). Какой объём мёда вылился из бочки? Ответ выразите в литрах и округлите до целого. Найдите массу мёда, изначально находившегося в бочке; ответ выразите в килограммах и округлите до целого.

Подсказка

Объём туловища Пуха, погружённого в мёд, равен объёму бочки минус объём оставшегося в ней мёда. Он составляет девять десятых всего объёма медведя.

Ответ

$M = 40$ кг. Вылилось 6 л мёда; первоначально в бочке было 90 кг мёда.

Решение

Первоначально мёд занимал объём 60 л. После того, как Пух залез в бочку, из неё вытекло наружу

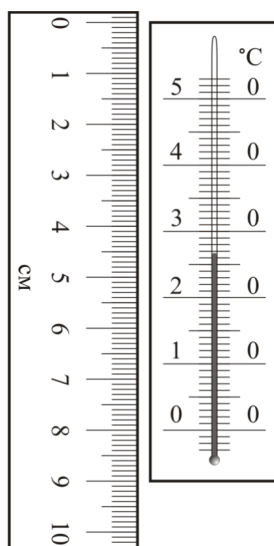
$$\frac{m}{\rho_m} = \frac{9 \text{ кг}}{1500 \text{ кг/м}^3} = 0,006 \text{ м}^3 = 6 \text{ л},$$

где m — масса мёда, вытекшего наружу. Значит, в бочке осталось 54 л мёда. Объём туловища Пуха равен $90 \text{ л} - 54 \text{ л} = 36 \text{ л}$. С другой стороны, объём туловища Пуха равен $\frac{9}{10}V$, где V — объём медведя. Следовательно, $V = \frac{10 \cdot 36}{9} = 40 \text{ л}$. Тогда масса Винни-Пуха равна

$$M = 1000 \text{ кг/м}^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 40 \text{ кг}.$$

8 Термометр и линейка на рисунке

После того, как в доме затопили печку, температура стала расти на 5 градусов за 30 минут. С какой скоростью будет ползти вверх столбик термометра, показанного на рисунке?



Дополнительные задания с кратким ответом (заочный тур, по условию этой задачи). Какова цена деления изображённого на рисунке термометра? Ответ выразите в градусах Цельсия и округлите до целого. Какова цена деления изображённой на рисунке линейки? Ответ выразите в миллиметрах и округлите до целого.

Подсказка

Линейка рядом с термометром позволяет найти, сколько миллиметров приходится на один градус. Для точности измеряйте по возможности большой промежуток шкалы.

Ответ

$\approx 3,6 \text{ мкм/с}$ ($0,22 \text{ мм/мин}$). Цена деления термометра 1°C ; цена деления линейки 1 мм .

Решение

Для ответа на вопрос задачи нужно найти расстояние между делениями термометра с помощью находящейся рядом линейки. Для того, чтобы определить это расстояние наиболее точно, нужно измерить линейкой как можно большую длину. Оптимально измерить расстояние между делениями 0°C и 50°C , поскольку они, с одной стороны, расположены далеко друг от друга, а с другой стороны деление термометра 50°C расположено почти ровно напротив деления $1,5$ см линейки, а деление термометра 0°C расположено почти ровно напротив деления $8,0$ см. Таким образом, расстояние между делениями термометра равно

$$\frac{8,0 \text{ см} - 1,5 \text{ см}}{50^{\circ}\text{C} - 0^{\circ}\text{C}} = 1,3 \frac{\text{мм}}{^{\circ}\text{C}}.$$

Значит, скорость движения столбика термометра равна

$$\frac{5^{\circ}\text{C} \cdot 1,3 \frac{\text{мм}}{^{\circ}\text{C}}}{30 \text{ мин}} = 0,22 \frac{\text{мм}}{\text{мин}} = 3,6 \frac{\text{мкм}}{\text{с}}.$$