

МОШ, 2015/16, отборочный этап, 9 класс

[Условия, ответы и решения](#)

1 Алюминиевый шарик с полостью

Алюминиевый шарик с герметичной внутренней полостью аккуратно опустили в измерительный цилиндр, заполненный водой. При этом объём вытесненной жидкости был равен 18 мл. Затем этот же шарик аккуратно опустили в измерительный цилиндр, заполненный керосином. В этом случае объём вытесненной жидкости равнялся 20 мл. Найдите массу шарика, его объём и объём полости. Плотность алюминия $\rho_0 = 2,7 \text{ г/см}^3$, воды $\rho_1 = 1,0 \text{ г/см}^3$, керосина $\rho_2 = 0,8 \text{ г/см}^3$. Шарик не касался стенок цилиндра, уровень жидкости в цилиндре всегда был в несколько раз больше диаметра шарика.

Подсказка

В какой из жидкостей шарик погрузился целиком, а в какой плавает? Для плавающего тела вес вытесненной жидкости равен весу тела.

Ответ

Масса шарика 18 г, его объём 20 см^3 , объём полости $13,3 \text{ см}^3$.

2 Лёд с дробинкой в закрытом баке

В герметично закрытом баке находится вода при температуре 0°C . В воде плавает кусок льда массой 1 кг, в который вмёрзла свинцовая дробинка массой 100 г. Какое количество теплоты нужно подвести к содержимому бака, чтобы лёд с дробинкой затонули? Чему будет равна масса льда, в момент, когда лёд с дробинкой начнут тонуть? Как изменится уровень воды в баке после того, как лёд с дробинкой утонут?

Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1,0 \text{ г/см}^3$, плотность льда $\rho_{\text{л}} = 0,9 \text{ г/см}^3$, плотность свинца $\rho_{\text{с}} = 11,3 \text{ г/см}^3$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 335 \text{ кДж/кг}$. Дробинка находится в середине куска льда и не отрывается от него.

Подсказка

Лёд тает при 0°C , поэтому средняя плотность куска «лёд + дробинка» растёт по мере таяния. Когда она сравняется с плотностью воды, кусок начнёт тонуть.

Ответ

Нужно подвести $\approx 60 \text{ кДж}$ ($60,3 \text{ кДж}$); масса льда в момент начала погружения $\approx 820 \text{ г}$; уровень воды понизится.

Решение

Когда средняя плотность оставшегося льда и дробинки станет больше плотности воды, дробинка начнёт тонуть, т. е.

$$\frac{M_1 + m}{\frac{M_1}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m}{\rho_{\text{с}}}} = \rho_{\text{в}}, \quad \text{следовательно} \quad M_1 = \frac{m(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}} \approx 820 \text{ г},$$

где M_1 — масса оставшегося льда, m — масса дробинки. Растаять должна масса льда $\Delta M = M - M_1$, где M — первоначальная масса льда. Значит, необходимо подвести количество теплоты

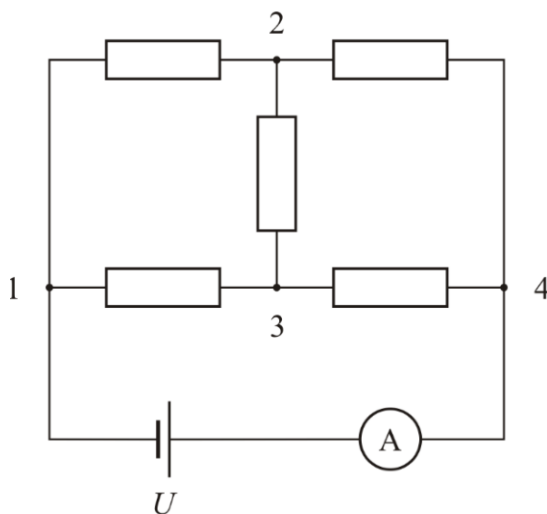
$$Q = \lambda \Delta M = \lambda \left(M - m \frac{(\rho_{\text{с}} - \rho_{\text{в}})\rho_{\text{л}}}{(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})\rho_{\text{с}}} \right) \approx 60 \text{ кДж}.$$

Так как оставшийся лёд с дробинкой опустятся на дно бака и будут давить на него с некоторой силой, то, следовательно, сила давления воды на дно должна уменьшиться, чтобы суммарная сила давления на дно осталась неизменной. Значит, уровень воды понизится.

3 Мостовая схема и амперметр

Вася нашёл в ящике своего папы-физика четыре резистора сопротивлением 1 Ом каждый, один резистор сопротивлением 4 Ом, амперметр, батарейку с напряжением $U = 4,5 \text{ В}$ и провода. С использованием этих элементов Вася собрал цепь, схема которой изображена на рисунке (такая схема называется мостовой). Какой из резисторов нужно отключить Васе для того, чтобы показания амперметра изменились сильнее всего? Вася знает расположение резистора с сопротивлением 4 Ом, но пока вы не расскажете, что ему надо делать, он Вам не покажет, где располагается этот резистор.

Рассмотрите два случая: А) если резистор сопротивлением 4 Ом включен в диагональ моста (то есть между точками 2 и 3); и Б) если этот резистор включен НЕ в диагональ моста. Для каждого случая дайте ответ на вопрос задачи. Для первого случая дополнительно рассчитайте чему равно изменение показаний амперметра. Батарейку можно считать идеальным источником напряжения, амперметр также считайте идеальным.



Подсказка

Если резистор в диагонали, то при равных плечах моста ток через него не течёт. Во втором случае сравните токи через разные резисторы: чем больше ток через резистор, тем сильнее изменится общий ток при его отключении.

Ответ

А) нужно отключить любой из резисторов сопротивлением 1 Ом, показания амперметра изменятся на 2 А (по модулю); Б) нужно отключить резистор сопротивлением 1 Ом, подключённый к тому же полюсу батарейки, что и резистор сопротивлением 4 Ом.

Решение

Если резистор 4 Ом включён в диагональ моста, то его не имеет смысла вытаскивать, потому что показания амперметра при этом не изменятся. То есть в этом случае надо отключить любой резистор 1 Ом. Если же резистор 4 Ом подключён, например, к плюсу батарейки (это на самом деле не принципиально), то нужно отключить резистор 1 Ом, который тоже подключён к плюсу батарейки, так как через него течёт самый большой ток.

Для случая, когда резистор сопротивлением 4 Ом включён в диагональ моста: вначале ток через диагональ моста не течёт и сопротивление всей цепи равно

$$R_1 = \left(\frac{1}{2 \text{ Ом}} + \frac{1}{2 \text{ Ом}} \right)^{-1} = 1 \text{ Ом}.$$

После отключения одного из резисторов сопротивлением 1 Ом полное сопротивление всей цепи будет равно

$$R_2 = 1 \text{ Ом} + \left(\frac{1}{1 \text{ Ом}} + \frac{1}{5 \text{ Ом}} \right)^{-1} = \frac{11}{6} \text{ Ом} \approx 1,83 \text{ Ом}.$$

Абсолютная величина изменения показаний амперметра равна

$$\frac{U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = 2 \text{ А}.$$

4 Треугольник из шести металлических частей

Вася решил изготовить плоскую деталь в форме треугольника по следующей схеме. Сначала картонную модель треугольника он разделил медианами на 6 частей. Затем отдельные части заменил копиями, изготовленными из разных металлов. Используемые металлы и их плотности представлены в таблице. Определите возможные варианты средней плотности получившегося треугольника, собранного из отдельных металлических деталей, если все из перечисленных металлов были использованы ровно по два раза. Сколько различных вариантов средней плотности может получиться, если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза? Какая средняя плотность детали в этом случае максимальная, а какая минимальная?

Металл	Плотность, г/см ³
Свинец	11,40
Медь	8,96
Сталь	7,60

Подсказка

Докажите, что медианы делят треугольник на шесть частей равной площади. Тогда средняя плотность выражается просто через плотности частей.

Ответ

$\bar{\rho} = 9,32 \text{ г/см}^3$ (единственное значение); 10 вариантов; $\bar{\rho}_{\min} = 8,46 \text{ г/см}^3$, $\bar{\rho}_{\max} = 10,36 \text{ г/см}^3$.

Решение

Легко доказывается, что медианы делят треугольник на 6 равновеликих частей. Поэтому средняя плотность равна «среднему арифметическому» плотностей используемых металлов:

$$\bar{\rho} = \frac{m}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i \frac{S}{6}}{S} = \frac{\sum_{i=1}^6 \rho_i}{6}.$$

Так как все виды металлов были использованы по два раза, средняя плотность получившегося треугольника принимает только одно возможное значение

$$\bar{\rho} = \frac{11,40 + 8,96 + 7,60}{3} = 9,32 \text{ г/см}^3.$$

Если каждый металл нужно использовать не меньше одного раза, то возможных вариантов с различной средней плотностью 10 (каждое число в фигурных скобках соответствует количеству частей треугольника определённой плотности): $\{4, 1, 1\}$ — три варианта, $\{2, 2, 2\}$ — один вариант, $\{3, 2, 1\}$ — шесть вариантов.

$$\bar{\rho}_{\min} = \frac{4 \cdot 7,6 + 8,96 + 11,4}{6} = 8,46 \text{ г/см}^3, \quad \bar{\rho}_{\max} = \frac{4 \cdot 11,4 + 7,6 + 8,96}{6} = 10,36 \text{ г/см}^3.$$

5 Ракета с двумя двигателями

У вертикально стартующей ракеты есть два двигателя. Двигатели могут включаться по очереди, но на одинаковое время. Один может сообщить ей ускорение a относительно земли, а второй — ускорение $2a$ относительно земли. В какой последовательности следует включать двигатели, сначала мощный, а затем сразу же слабый или наоборот, чтобы к моменту прекращения их работы ракета переместилась на наибольшее расстояние?

Подсказка

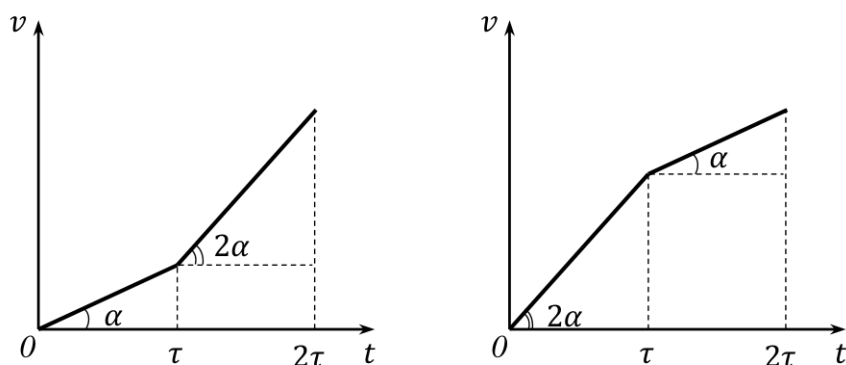
Путь равен площади под графиком скорости от времени. Нарисуйте графики $v(t)$ для обеих последовательностей и сравните площади.

Ответ

Сначала нужно включить мощный двигатель, а затем слабый.

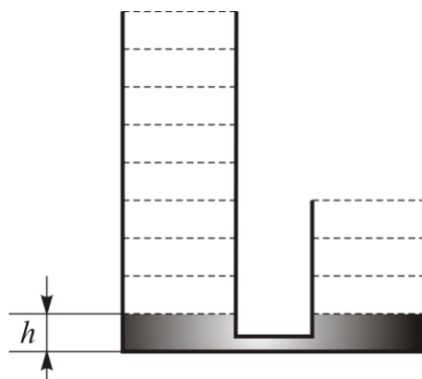
Решение

Из приведённых графиков скорости от времени видно, что площадь под графиком во втором случае больше. Следовательно, чтобы к моменту прекращения работы двигателей ракета переместилась на наибольшее расстояние, следует включать сначала мощный двигатель, а затем слабый.



6 L-образная трубка с маслом

Какой максимальный объём масла плотностью $0,8\rho$ можно налить в L-образную трубку с открытыми концами, частично заполненную водой плотностью ρ ? Площадь сечения вертикальных колен трубки S . Объёмом горизонтальной соединительной трубочки можно пренебречь. Размеры L-образной трубки и высота столба воды указаны на рисунке. Пунктирные метки сделаны на одинаковых расстояниях h друг от друга. Затыкать открытые концы, наклонять трубку и выливать из неё воду нельзя.



Подсказка

Масло легче воды, поэтому столб масла уравнивается более низким столбом воды. Постарайтесь использовать давление воды по максимуму, вытеснив её в правое колено.

Ответ

$$V = 6,5 Sh.$$

Решение

Простое решение — долить масло слева и справа (общей высотой столба $6h$) — неверное. Надо постараться максимально использовать давление столба воды, чтобы уравновесить его столбом масла большей высоты. Для этого доливаем в левое (высокое) колено масло до тех пор, пока оно не вытеснит всю воду в правое колено. При этом столб масла будет иметь высоту $2h \cdot 1,25 = 2,5h$. С этого момента есть две стратегии, приводящие к одинаковому результату. Можно справа и слева долить по $2h$ масла, а можно лить масло только в левое колено, тогда из-за меньшей плотности оно станет «пробулькивать» через воду и займёт автоматически весь оставшийся объём сверху в правом колене. Окончательный ответ: $V = 6,5 Sh$.

7 Стальная деталь в калориметре

В калориметр объёмом $V_1 = 200$ мл, до краёв заполненный водой при температуре $t_1 = 10^\circ\text{C}$, быстро, но аккуратно помещают стальную деталь массой $m_2 = 780$ г, нагретую до температуры $t_2 = 80^\circ\text{C}$. Найдите температуру t_3 , которая установится в калориметре. Теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Плотность воды $\rho_1 = 1,0$ г/см³, стали $\rho_2 = 7,8$ г/см³, удельная теплоёмкость воды $c_1 = 4,2$ кДж/(кг·°C), стали $c_2 = 0,46$ кДж/(кг·°C).

Подсказка

Калориметр полон до краёв. Что произойдёт с частью воды, когда в него попадёт деталь, и какая масса воды останется в нагревании?

Ответ

$t_3 = 42^\circ\text{C}$.

Решение

Объём детали $V_2 = \frac{m_2}{\rho_2} = 100$ см³ = 100 мл, поскольку калориметр был заполнен водой полностью, деталь вытеснит часть воды, и она выльется из калориметра. Конечная масса воды в калориметре $m_1 = \rho_1(V_1 - V_2) = 100$ г. Запишем уравнение теплового баланса:

$$m_1 c_1 (t_3 - t_1) = m_2 c_2 (t_2 - t_3),$$

откуда

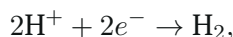
$$t_3 = \frac{m_1 c_1 t_1 + m_2 c_2 t_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = 42^\circ\text{C}.$$

8 Электролиз воды

Если в воду поместить два электрода, через которые подать электрический ток, начнётся реакция электролиза воды: на положительном электроде будет происходить реакция



то есть из двух ионов кислорода образуются молекула газа кислорода и 4 электрона, а на отрицательном электроде будет происходить реакция



то есть из двух ионов водорода и двух электронов образуется молекула газа водорода.

В школьной лабораторной работе в течение 20 минут проводился электролиз воды, причём сила тока в цепи была постоянна. В результате выделилось $2,5 \cdot 10^{-5}$ моль водорода. Какова была сила тока в цепи? Элементарный заряд $1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл, постоянная Авогадро $6,02 \cdot 10^{23}$ 1/моль.

Подсказка

Сколько электронов нужно, чтобы получилась одна молекула водорода? Сила тока — заряд, протёкший за единицу времени.

Ответ

$I = 4,0$ мА.

Решение

За 20 минут выделилось

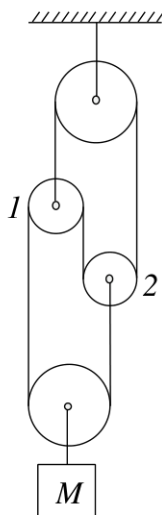
$$N = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ моль} \cdot 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}} = 15,05 \cdot 10^{18}$$

молекул водорода. Значит, за это время в цепи протёк заряд $2eN$ и сила тока в цепи

$$I = \frac{2 \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \cdot 15,05 \cdot 10^{18}}{20 \cdot 60 \text{ с}} = 4,0 \text{ мА}.$$

9 Груз на двух блоках

В системе, изображённой на рисунке, определите ускорения груза и двух одинаковых блоков 1 и 2. Нить невесома и нерастяжима, массы блоков пренебрежимо малы по сравнению с массой груза M , трения нет. Ускорение свободного падения g известно.



Подсказка

Какое натяжение нити нужно, чтобы почти невесомый блок двигался с конечным ускорением? Запишите условие нерастяжимости нити и продифференцируйте его дважды.

Ответ

Груз и нижний блок падают с ускорением g (вниз); ускорение блока 1 равно $2g$ (вниз), блока 2 — нулевое: $a_1 = 2g$, $a_2 = 0$.

Решение

Для определения ускорения груза массы блоков можно принять равными нулю (так как массы блоков пренебрежимо малы по сравнению с массой груза M). Тогда, записывая второй закон Ньютона, например, для блока 1, получаем, что натяжение нити в системе равно нулю (на самом деле оно очень маленькое, гораздо меньше чем Mg). Следовательно, груз вместе с нижним блоком падают с ускорением g .

Записав длину нити и продифференцировав уравнение по времени дважды, получаем уравнение кинематической связи для ускорений:

$$2a_3 - a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 - a_2 = 2g,$$

где a_1 — проекция ускорения блока 1, a_2 — проекция ускорения блока 2, a_3 — проекция ускорения нижнего блока (ось направлена вниз).

У нас получается одно уравнение и две неизвестных. Как же разрешить возникшую проблему? Необходимо вспомнить, что хоть блоки в системе и очень лёгкие, всё же они имеют некоторую массу, а значит, и натяжение в системе не совсем равно нулю. Тогда запишем второй закон Ньютона для блоков 1 и 2:

$$mg + T = ma_1,$$

$$mg - T = ma_2,$$

где m — массы блоков 1 и 2 (блоки по условию задачи одинаковые, а значит, массы у них равны), T — натяжение нити (нить невесома, трения нет, следовательно, натяжение во всей нити одинаково). Решая систему из трёх уравнений, получаем: $a_1 = 2g$, $a_2 = 0$.