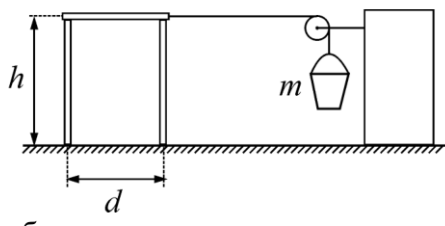


МОШ, 2015/16, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Табуретка и доливаемое ведро

На горизонтальном полу стоит табуретка массой $M = 4,5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между её ножками $d = 30$ см. Коэффициент трения между ножками и полом $\mu = 0,4$. Экспериментатор Глюк привязал к середине стороны сиденья табуретки невесомую нерастяжимую нить, перекинутую через блок (см. рис). На втором конце нити висит ведро с водой. Масса ведёрка вместе с водой равна $m = 0,6$ кг. Экспериментатор Глюк опустил в ведро тонкую трубку с внутренним диаметром $D = 4$ мм, по которой в ведро стала доливаться вода с постоянной скоростью $v = 0,2$ м/с. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с². Через какое время после этого табуретка придёт в движение? Как начнёт двигаться табуретка: скользить, двигаясь поступательно, или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси?



Подсказка

Найдите отдельно, при какой силе натяжения нити табуретка начнёт скользить и при какой начнёт опрокидываться, и сравните: что наступит раньше? Затем свяжите добавленную массу воды со временем через расход трубки.

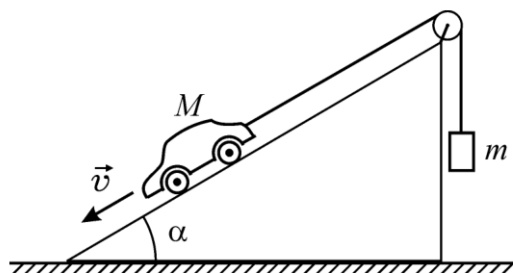
Ответ

Табуретка начнёт опрокидываться раньше, чем скользить; движение начнётся спустя время

$$t = \frac{4\Delta m}{\rho v \pi D^2} = \frac{4}{\rho v \pi D^2} \left(\frac{M d}{2h} - m \right) \approx 358 \text{ с} \approx 5 \text{ мин } 58 \text{ с}.$$

2 Электромобиль на наклонной плоскости

По наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, едет с постоянной скоростью $v = 1$ м/с игрушечный автомобиль, масса которого равна $M = 300$ г. Автомобиль связан лёгкой нитью, перекинутой через невесомый блок, с грузом массой $m = 200$ г, который движется вертикально. Автомобиль приводится в движение электромотором, который питается от батарейки. КПД электромотора при таком движении равен $\eta = 60\%$. Найдите количество теплоты, выделяющееся при протекании тока через обмотки электромотора за время $t = 2,5$ с. Автомобиль движется без проскальзывания, трением в осях и сопротивлением воздуха можно пренебречь, ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с².



Подсказка

Скорость постоянна, поэтому кинетическая энергия не меняется. Полезная работа мотора идёт на изменение потенциальной энергии системы, а затраченная энергия складывается из полезной работы и выделившегося тепла.

Ответ

$$Q = gvt(m - M \sin \alpha) \cdot \frac{100\% - \eta}{\eta} \approx 0,83 \text{ Дж.}$$

3 Горячая вода в кружке по глоткам

Десятиклассник Вася проводит домашний эксперимент. Он налил в кружку 200 мл воды (до краёв) при температуре $+20^\circ\text{C}$. Затем он отпивает один маленький глоток (5 мл), тут же доливает в чашку кипятком до краёв, аккуратно перемешивает содержимое чашки очень лёгкой пластиковой ложечкой (не расплёскивая содержимого) и повторяет описанную процедуру много раз. Максимальная температура воды, которую Вася ещё может проглотить, не рискуя обжечься, равна $+60^\circ\text{C}$. Сколько воды выпьет Вася до конца своего эксперимента?

Подсказка

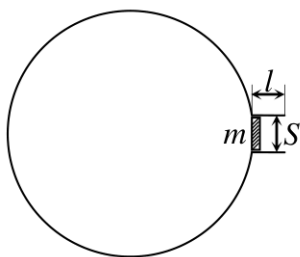
Следите за долей исходной холодной воды в кружке: после каждого глотка и доливания она умножается на одно и то же число. Запишите тепловой баланс для всего долитого кипятка и найдите, сколько его нужно.

Ответ

Вася выпьет 135 мл воды.

4 Пробка вылетает из колбы с гелием

В колбе объёмом $V = 2 \text{ л}$ при комнатной температуре находится $\nu = 0,1$ моля гелия. Горлышко колбы имеет длину $l = 2 \text{ см}$ и сечение $S = 10 \text{ см}^2$. Это горлышко закрыто цилиндрической пробкой массой $m = 10 \text{ г}$, могущей скользить по нему без трения. В начальный момент пробка удерживается у основания горлышка, и гелий не выходит наружу. Пробку отпускают, и она вылетает из горлышка со скоростью $v = 10 \text{ м/с}$. Найдите изменение ΔT температуры гелия в колбе к моменту вылета пробки из горлышка. Давление воздуха в комнате равно $p_0 = 1 \text{ атм}$, теплообменом гелия в колбе с окружающими телами за время вылета пробки можно пренебречь.



Подсказка

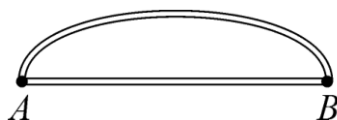
Запишите закон сохранения энергии для системы «гелий и пробка»: куда уходит убыль внутренней энергии гелия? Не забудьте работу против атмосферного давления.

Ответ

Температура гелия понизится, изменившись на $\Delta T = -\frac{mv^2 + 2p_0Sl}{3\nu R} \approx -2 \text{ К}$.

5 Две медные проволоки между клеммами

На закреплённые неподвижно клеммы A и B , расстояние между которыми равно 40 см, может подаваться постоянное напряжение 0,3 В. К клеммам прикреплены две медные проволоки без изоляции, всюду имеющие круглое поперечное сечение. Одна из проволок натянута и имеет длину 40 см, а другая имеет длину 70 см. Диаметр обеих проволок 0,6 мм. Как сделать так, чтобы тепловая мощность, выделяющаяся в этой системе, была максимальной? Чему равна эта мощность? Проволоки можно приводить в электрический контакт друг с другом всеми возможными способами, но нельзя обрывать их и отсоединять концы проволок от клемм. Удельное сопротивление меди $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$.



Подсказка

При заданном напряжении мощность U^2/R максимальна, когда сопротивление цепи минимально. Какое соединение участков проволок уменьшает сопротивление?

Ответ

Максимальная мощность равна $\approx 9 \text{ Вт}$; соединение проволок, при котором она достигается, такое: нужно длинную проволоку натянуть вдоль короткой проволоки, а оставшийся участок длинной проволоки сложить вдвое и, перегнув в точке B , приложить к отрезку AB .

6 Самолёт, летящий курсом на северо-восток

Самолёт в Новогоднюю ночь в безветренную погоду стартовал с аэродрома Санкт-Петербурга (60° северной широты) и летит на постоянной высоте $h = 5$ км с постоянной по величине скоростью $V = 1000$ км/час, держа всё время курс на северо-восток (по звёздам). С каким по модулю ускорением относительно Земли (в системе отсчёта Птолемея) движется самолёт ровно через время T , равное четырём часам полёта? Землю можно считать шаром с радиусом $R = 6400$ км.

Подсказка

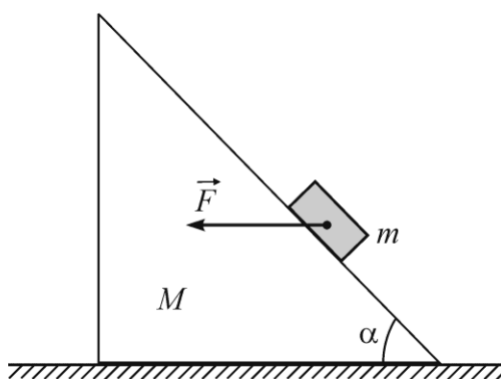
Курс на северо-восток означает постоянный угол 45° с меридианом. Найдите широту самолёта через время T и радиус его параллели, а затем разложите ускорение на составляющие от поворота вектора скорости.

Ответ

Через 4 часа полёта самолёт движется относительно Земли с ускорением, модуль которого равен $a \cong 0,1$ м/с².

7 Клин и брусок: после опрокидывания

Клин массой $M = 5$ кг с углом при основании $\alpha = 45^\circ$ расположен на гладком горизонтальном столе. На наклонной поверхности клина лежит брусок массой $m = 1$ кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени t по закону $F = \delta t$, где коэффициент пропорциональности $\delta = 1$ Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском равен $\mu = 1,2$. 1) Чему равен модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время $T = 12$ с после начала действия силы F , если клин к этому моменту ещё не начал опрокидываться? 2) Найдите ускорения клина и бруска через время $5T = 1$ мин после начала действия силы F . Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с².



Подсказка

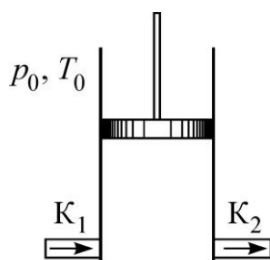
Запишите второй закон Ньютона для бруска в проекциях и найдите силы трения и реакции как функции F . Сравните $|F_{\text{тр}}|$ с μN при $\mu > \text{ctg } \alpha$: будет ли проскальзывание?

Ответ

- 1) через время $T = 12$ с после начала действия силы F модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок, равен 0 Н (т.е. сила трения между телами в этот момент отсутствует);
 2) ускорения клина и бруска в момент времени $5T$ одинаковы, направлены горизонтально и равны по модулю $a = A = \frac{F}{m + M} = \frac{5\delta T}{m + M} = 10 \text{ м/с}^2$.

8 Цилиндр с двумя клапанами

В цилиндре под поршнем находится воздух. В стенках цилиндра есть два клапана: впускной K_1 и выпускной K_2 . Впускной клапан открывается тогда, когда разность давлений воздуха снаружи и внутри цилиндра превышает $\Delta_1 = 0,2 p_0$, где p_0 — атмосферное давление. Выпускной клапан открывается тогда, когда разность давлений внутри и снаружи превышает $\Delta_2 = 0,4 p_0$. Поршень совершает очень медленные колебания так, что объём воздуха в цилиндре изменяется в пределах от V_0 до $2V_0$. Температура снаружи и внутри цилиндра постоянна и равна T_0 . 1) Определите наименьшее и наибольшее количество воздуха в цилиндре при колебаниях поршня. 2) Изобразите в координатах p – V процесс, происходящий с воздухом в цилиндре после того, как поршень уже совершил достаточно много колебаний.



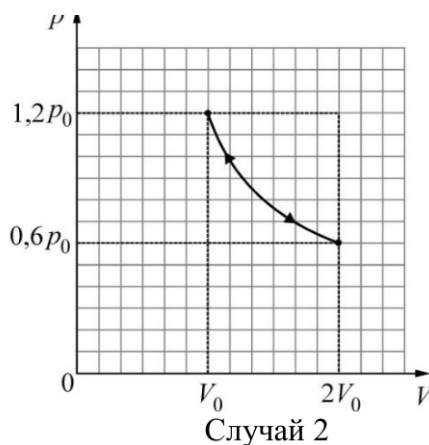
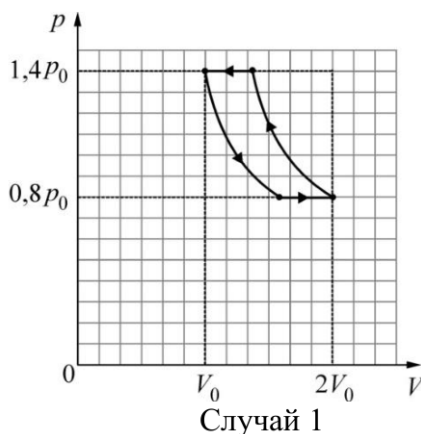
Ответьте на оба вопроса задачи, если $\Delta_1 = 0,4 p_0$, а $\Delta_2 = 0,2 p_0$.

Подсказка

Клапан открывается, когда давление в цилиндре выходит за пределы $p_0 - \Delta_1$ и $p_0 + \Delta_2$. Выясните, достигают ли давления этих границ при изотермическом изменении объёма от V_0 до $2V_0$ и сколько воздуха при этом остаётся.

Ответ

В первом случае $\nu_{\max} = \frac{1,6 p_0 V_0}{RT_0}$, $\nu_{\min} = \frac{1,4 p_0 V_0}{RT_0}$; во втором случае количество воздуха остаётся постоянным (после того, как оно один раз установилось) и равным $\nu = \frac{1,2 p_0 V_0}{RT_0}$. Процессы в координатах p – V :



9 Заряды на нити и налетающее тело

Две покоящиеся в космосе вдали от других тел материальные точки, имеющие одинаковые массы m и электрические заряды q , скреплены невесомой, нерастяжимой и не проводящей электрический ток прочной гибкой нитью длиной L . Незаряженное тело малых размеров массой $2m$ движется поступательно в направлении средней точки нити со скоростью V , направленной перпендикулярно нити. При соприкосновении тела и нити они друг относительно друга не проскальзывают, но и не прилипают друг к другу. Какими будут модули скоростей материальных точек и тела через очень большое время? На каком минимальном расстоянии $L_{\min}$ друг от друга будут находиться материальные точки в процессе движения?

Подсказка

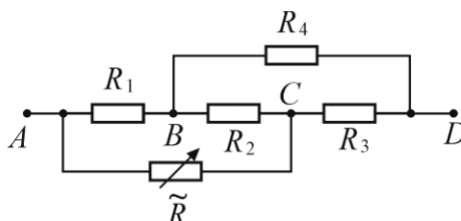
Взаимодействие тела с точками можно рассматривать как абсолютно упругое столкновение тел равных масс. Для наименьшего расстояния запишите закон сохранения энергии: в этот момент точки движутся только вдоль направления V .

Ответ

1) две материальные точки после окончания взаимодействия с телом будут двигаться с равными скоростями V , а тело массой $2m$ остановится; 2) материальные точки в процессе движения будут находиться друг от друга на минимальном расстоянии $L_{\min} = \left(\frac{1}{L} + \frac{mV^2}{2kq^2} \right)^{-1}$.

10 Переменный резистор в схеме

Участок AD электрической цепи, схема которого показана на рисунке, состоит из четырёх постоянных резисторов с сопротивлениями $R_1 = 20$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = 80$ Ом, $R_4 = 25$ Ом и одного переменного резистора $\tilde{R}$, сопротивление которого может изменяться от нуля до $R_{\max} = 10$ кОм. Сила тока, текущего через участок AD , поддерживается постоянной и равной $I = 1,2$ А. 1) При каких значениях сопротивления переменного резистора ток через резистор R_2 будет течь в направлении от точки B к точке C , а при каких — в обратном направлении? 2) При каком значении сопротивления переменного резистора напряжение на резисторе R_2 будет максимальным, и чему равно это напряжение?



Подсказка

Обозначьте токи во всех ветвях, запишите условия сохранения заряда в узлах B и C и равенство падений напряжения между B и C по двум путям. Направление тока через R_2 определяется знаком I_2 .

Ответ

1) При $0 < \tilde{R} < R_1 R_3 / R_4 = 64$ Ом ток через резистор R_2 течёт от точки C к точке B , а при $R_{\max} > \tilde{R} > R_1 R_3 / R_4$ — от точки B к точке C . 2) Напряжение на резисторе R_2 достигает максимального по модулю значения $\approx 10,8$ В при $\tilde{R} = 0$.