

МОШ, 2015/16, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Радиус Земли по крейсеру на горизонте

Школьник летом был в Крыму и с высоты $h = 4$ м над уровнем моря увидел на линии горизонта ракетный крейсер «Москва», который шёл вдоль берега и был виден «во весь рост», от ватерлинии до верха надстроек. Школьник прикрыл один глаз, вытянул перед собой руку и большим пальцем, поднятым вверх, «закрыл» весь крейсер от носа до кормы корабля (для открытого глаза). Ширина пальца равна $a = 2$ см. Расстояние от глаза до большого пальца при вытянутой руке равно $l = 70$ см. День был солнечным, поэтому диаметр зрачка открытого глаза был небольшим — всего 1 мм. Затем он через свой смартфон нашёл справку о параметрах крейсера, где обнаружил, что длина корабля составляет $L = 186,5$ м. Каков радиус R Земли, вычисленный школьником на основании всех имеющихся данных?

Подсказка

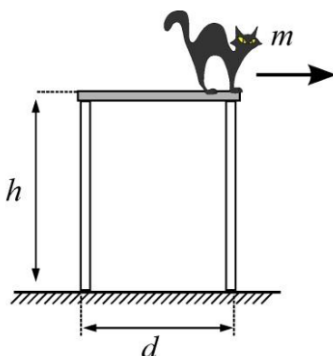
Из подобия треугольников найдите расстояние до корабля, а затем свяжите его с высотой наблюдателя и радиусом Земли теоремой Пифагора.

Ответ

$$R \approx \frac{l^2 L^2}{2ha^2} \approx 5326 \text{ км.}$$

2 Кошка прыгает с табуретки

На краю табуретки массой $M = 4,5$ кг сидит кошка массой $m = 1,5$ кг. Высота табуретки $h = 45$ см, а расстояние между ножками $d = 30$ см (см. рис.). Коэффициент трения между ножками и полом равен $\mu = 0,5$. Кошка прыгает с табуретки в направлении, показанном стрелкой. При этом ускорение центра масс кошки направлено горизонтально. При каком максимальном значении модуля этого ускорения табуретка будет оставаться неподвижной? Если модуль ускорения превысит это значение на очень малую величину, то как начнёт двигаться табуретка: скользить по полу или опрокидываться, поворачиваясь вокруг некоторой оси? Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Подсказка

Найдите горизонтальную и вертикальную силы, действующие на табуретку со стороны кошки, и сравните два порога: по моменту сил (опрокидывание вокруг дальней ножки) и по трению (проскальзывание).

Ответ

Табуретка будет оставаться неподвижной, если модуль ускорения центра масс кошки не превышает $a = \frac{gd}{h} \left(\frac{M}{2m} + 1 \right) \approx 16,67 \text{ м/с}^2$; при превышении этого значения на малую величину табуретка начнёт опрокидываться.

3 Сдувание мыльного пузыря

Вася выдувает через длинную трубку сферический мыльный пузырь. Надув пузырь до некоторого размера, он выпускает трубку изо рта, при этом воздух из пузыря выходит наружу обратно через трубку. Окончательно пузырь исчезает, так и не лопнув, через время τ после того, как его перестали надувать. За какое время сдуется надутый таким же образом мыльный пузырь вдвое большего радиуса? Считайте, что воздух движется по трубке достаточно медленно, свойства мыльной плёнки у обоих пузырей одинаковы.

Подсказка

Как добавочное давление в пузыре зависит от его радиуса и чем оно уравнивается при медленном течении воздуха по трубке? Отсюда найдите скорость убывания объёма.

Ответ

Пузырь вдвое большего радиуса сдуется за время 16τ .

4 Бесконечная сетка с ромбами

В бесконечную проволочную сетку, состоящую из шестиугольников с сопротивлениями каждого ребра r (см. рис. 1), добавили проводники с такими же сопротивлениями — так, как показано на рис. 2 (каждую шестиугольную ячейку разделили тремя отрезками проволоки сопротивлением r каждый на три одинаковых ромба). Найдите сопротивление R_{AB} между точками A и B , показанными на рис. 2.

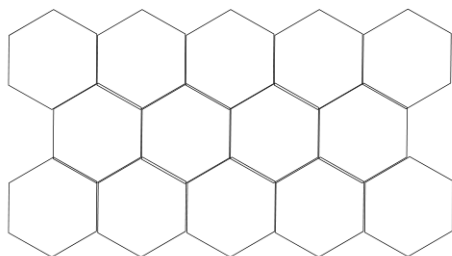


Рис. 1.

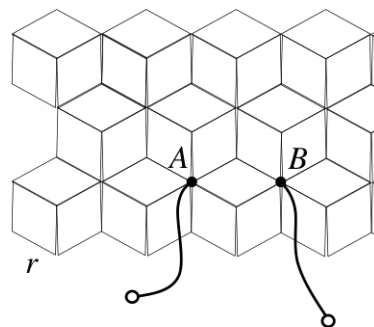


Рис. 2.

Подсказка

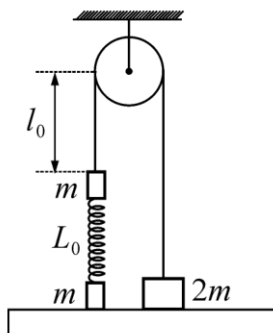
Представьте ток из A в B как сумму двух случаев: ток вытекает из A в бесконечность и ток приходит из бесконечности в B . Используйте симметрию сетки.

Ответ

$$R_{AB} = \frac{1}{2} r.$$

5 Падающие грузы и пружина

На рисунке изображена механическая система, в которой через невесомый блок с прикреплённой к потолку горизонтальной осью перекинута невесомая нерастяжимая нить. К концам нити прикреплены небольшие грузы массами m и $2m$. Груз $2m$ лежит на горизонтальной опоре. Груз m висит. К грузу m через невесомую идеальную пружину с жёсткостью k , расположенную вертикально и имеющую небольшую длину L_0 , прикреплён второй такой же груз m . В начальный момент пружина не деформирована, и второй груз m лежит на той же опоре, что и груз $2m$. Расстояние от верхнего груза m до блока равно l_0 . Свободные участки нити, не лежащие на шкиве блока, вертикальны. В момент времени $t = 0$ опора исчезает (её быстро убирают вниз). Через время τ после этого один из грузов коснулся блока. Какой это груз? При каком значении l_0 время τ максимально? Чему равно это максимальное значение τ ?



Подсказка

Сведите динамику к колебаниям: свяжите ускорения грузов через нерастяжимую нить и через удлинение пружины, и найдите период получившихся колебаний.

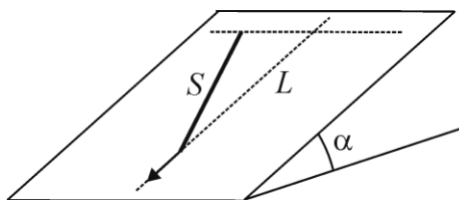
Ответ

Блока первым коснулся верхний груз m ; это могло произойти через максимальное время $\tau_{\max} = \pi \sqrt{3m/(4k)}$, которое обеспечивается при $l_0 = mg/(2k)$.

6 Стержень на наклонной плоскости

Тонкий однородный жёсткий стержень S скользит по гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. В начальный момент времени нижний конец стержня движется вниз вдоль наклонной плоскости (по линии L «падения воды», как указано стрелкой — см. рисунок), а верхний конец стержня движется горизонтально, причём модуль скорости верхнего конца в два раза больше, чем нижнего. По прошествии некоторого промежутка времени оказалось, что середина стержня сместилась на одинаковые расстояния по горизонтали и вдоль

линии «падения воды». Во сколько раз изменился модуль скорости середины стержня за этот промежуток времени?



Подсказка

Проекции скоростей концов на ось стержня равны; найдите по ним скорость середины. Сила тяжести вдоль плоскости постоянна, поэтому центр масс движется с постоянным ускорением $g \sin \alpha$ вдоль линии падения воды.

Ответ

Модуль скорости середины стержня изменился в $\frac{V_{O2}}{V_{O1}} = \sqrt{\frac{13}{5}} \approx 1,61$ раза.

7 Упругий удар двух шаров

Вдоль гладкой горизонтальной поверхности скользит шар неизвестной массы в направлении другого покоящегося шара массой 120 г. В некоторый момент времени происходит абсолютно упругое лобовое соударение этих шаров, в результате которого первый шар передаёт второму 64% своей кинетической энергии. Опыт повторяют, заменив движущийся шар шаром другой массы, но не изменив его начальной скорости. Оказалось, что в результате второго опыта доля переданной покоящемуся шару кинетической энергии не изменилась. Определите, на какую величину Δm отличались массы движущихся шаров в двух опытах.

Подсказка

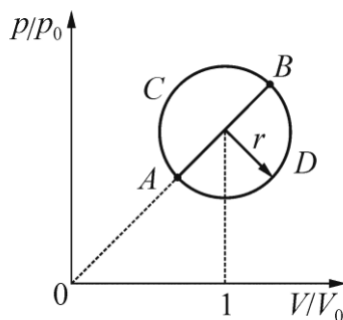
Выразите долю переданной энергии через отношение масс шаров; уравнение для отношения масс имеет два корня.

Ответ

Массы движущихся шаров в двух опытах отличались на 450 г.

8 Две тепловые машины на одной окружности

Две тепловые машины используют в качестве рабочего тела постоянное количество одноатомного идеального газа. Циклы, по которым работают эти машины, при изображении в координатах «давление-объём» при некотором выборе масштабов являются двумя половинами одной окружности: первая машина работает по циклу $ACBA$, а вторая — по циклу $ABDA$ (см. рисунок). Диаметр AB этой окружности лежит на прямой, проходящей через начало координат, и обладает тем свойством, что на участке цикла ACB газ только получает теплоту от нагревателя, а на участке BDA — только отдаёт теплоту нагревателю. Центр окружности соответствует объёму V_0 , радиус окружности при выбранном масштабе равен $r = \frac{1}{\sqrt{10}}$. Во сколько раз максимально возможный КПД второй машины отличается от максимально возможного КПД первой машины?



Подсказка

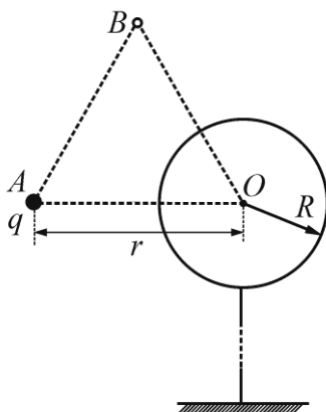
Работы циклов одинаковы (площади половин круга), поэтому отношение КПД равно обратному отношению теплот, полученных рабочим телом; найдите теплоту на участке AB , учитывая, что в точках A и B теплообмен отсутствует.

Ответ

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = 1 + \frac{\pi}{8\sqrt{15}} \approx 1,1 \text{ раза.}$$

9 Заземление сферы

В точке A , расположенной на расстоянии r от центра O незаряженной проводящей сферы радиусом R , находится точечный заряд q . Сферу заземляют длинным тонким проводником. На сколько изменится (после заземления) потенциал φ_B точки B , являющейся вершиной равнобедренного треугольника ABO ?



Подсказка

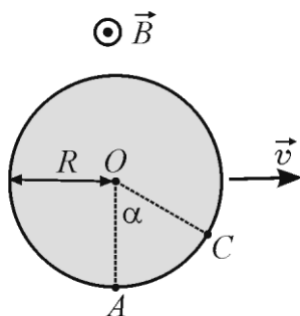
При заземлении на сфере появляется дополнительный заряд Q ; найдите его по потенциалу центра сферы (он должен остаться нулевым) и подумайте, как этот заряд распределён и какое поле создаёт снаружи.

Ответ

После заземления потенциал точки B изменится на $\Delta\varphi_B = -\frac{Rq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

10 Незаряженный шарик в магнитном поле

Незаряженный металлический шарик радиусом $R = 10$ см движется в однородном магнитном поле перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$ с постоянной скоростью $v = 1$ м/с. Поверхностная плотность зарядов на «полюсе» шарика в точке A оказалась равной σ_0 . Определите поверхностную плотность зарядов в точке C , направление на которую из центра шарика составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с направлением OA (см. рис.). Чему равна разность потенциалов точек A и C ? Модуль вектора магнитной индукции $B = 2$ Тл.



Подсказка

Внутри шарика устанавливается однородное электрическое поле, компенсирующее силу Лоренца. Разложите скорость на составляющие вдоль OC и перпендикулярно OC и воспользуйтесь суперпозицией.

Ответ

$$\sigma_C = \sigma_0 \cos \alpha = \sigma_0/2; \varphi_A - \varphi_C = vBR(1 - \cos \alpha) = 0,1 \text{ В.}$$