

МОШ, 2015/16, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Катер в канале с течением

Горизонтальный канал соединяет две судоходные реки А и Б. Иногда в нем возникает слабое течение, которое может быть направлено либо в одну, либо в другую сторону. От одной реки к другой по каналу курсирует катер, скорость которого относительно воды постоянна. Капитан катера заметил, что за много лет ему никогда не удавалось совершить рейс туда и обратно быстрее, чем за $t_1 = 2$ часа, а самый неудачный рейс длился $t_2 = 3$ часа (время разворота катера и остановок не учитывается). Однажды мотор катера сломался, но из-за стечения обстоятельств рейс от А к Б и обратно все-таки был выполнен. Какое минимальное время для этого могло понадобиться катеру?

После ремонта катер стал развивать в два раза большую скорость относительно воды. Как долго теперь может длиться рейс туда и обратно?

Подсказка

Выразите время рейса туда и обратно через длину канала s , скорость катера v и скорость течения u . Когда рейс быстрее всего, а когда дольше всего?

Ответ

Со сломанным мотором минимальное время рейса $T_{\min} = 6t_1 = 12$ часов; после ремонта рейс может длиться от $t_{\min} = \frac{6}{11}t_1 \approx 65$ мин до $t_{\max} = \frac{2}{3}t_1 = 80$ мин.

2 Средняя скорость на пути семьи

Семья Петровых ехала на машине из города в деревню. Весь путь занял у них 2,5 часа. Известно, что средняя скорость машины за первые 2 часа пути равна 60 км/ч, а средняя скорость за последние 2 часа пути равна 80 км/ч. Отец попросил сына, зная это, вычислить среднюю скорость машины на всём пути. Подумав, сын справедливо сказал, что для этого недостаточно данных, но можно вычислить наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости, зная, что семья никогда не нарушает правила дорожного движения, а машина едет только вперёд. Согласно правилам, скорость машины везде на пути от города к деревне не должна превышать 90 км/ч. Найдите наименьшее и наибольшее возможное значение средней скорости машины Петровых.

Подсказка

Участки «первые 2 часа» и «последние 2 часа» перекрываются. Обозначьте путь на общем участке (от 0,5 ч до 2 ч) через S_2 и выразите через него весь путь.

Ответ

Средняя скорость машины может лежать в интервале от $v_{\text{ср.мин}} = 64$ км/ч до $v_{\text{ср.макс}} = 82$ км/ч.

3 Яйца в специальном ящике

В тексте одной из задач задачника Григория Остера «Ненаглядное пособие по математике» написано следующее:

«В специальный ящик можно уложить 68 куриных яиц. Если уминать их ногами, то поместится в 100 раз больше».

С точки зрения физики, это может показаться странным. Жидкости (в частности, белок и желток куриных яиц) трудно поддаются сжатию. Поэтому плотности белка и желтка практически невозможно изменить, уминая яйца ногами. То же самое справедливо и в отношении яичной скорлупы. Поэтому, если яйца в ящике лежат вплотную друг к другу, то объём содержимого ящика нельзя изменить в такое большое число (100) раз.

Однако, в задаче сказано, что ящик — специальный. Можно предположить, что в ящике были специальные перегородки, за счёт которых яйца укладывались не вплотную, а на некотором расстоянии друг от друга, и большую часть объёма ящика занимал воздух. Предположим, что эти перегородки были лёгкими и тонкими: масса и объём всех перегородок пренебрежимо мала по сравнению с массой и объёмом всех яиц. Будем считать также, что при уминании яиц ногами белок и желток не выплёскиваются из ящика. Известно, что средняя плотность одного куриного яйца равна 1060 кг/м^3 . Зная это, ответьте на следующие вопросы.

1. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика с 68 куриными яйцами?
2. Чему равна средняя плотность содержимого специального ящика, если в него положили только 40 яиц?

Подсказка

Если яйца уминают, объём содержимого равен объёму ящика, а масса содержимого та же, что у яиц. Во сколько раз тогда объём ящика больше объёма яиц?

Ответ

$$1) \frac{\rho_{\text{яйца}}}{100} = 10,6 \text{ кг/м}^3; \quad 2) \frac{\rho_{\text{яйца}}}{170} \approx 6,2 \text{ кг/м}^3.$$

4 Масса печатного символа

Вася взвесил на очень точных электронных весах (которые «чувствуют» изменение массы $0,01 \text{ г}$) два чистых белых листа бумаги формата А4 (плотность бумаги 80 г/м^2 , размеры листа $297 \text{ мм} \times 210 \text{ мм}$). Массы листов были совершенно одинаковыми. На одном из листов на двух его сторонах Вася напечатал на принтере текст, в котором было 6500 символов. После взвешивания листа с текстом оказалось, что его масса увеличилась на 1,6%. Сколько в среднем весит один символ?

Подсказка

Найдите площадь и массу листа, затем массу всего текста как 1,6% от массы листа.

Ответ

Один символ весит в среднем $12,3 \text{ мкг}$.

5 Автобус и средняя скорость за треть времени

Первую половину пути автобус ехал со скоростью в 8 раз большей, чем вторую. Средняя скорость автобуса на всем пути оказалась равной 16 км/ч. Найдите среднюю скорость автобуса за первую треть времени движения.

Подсказка

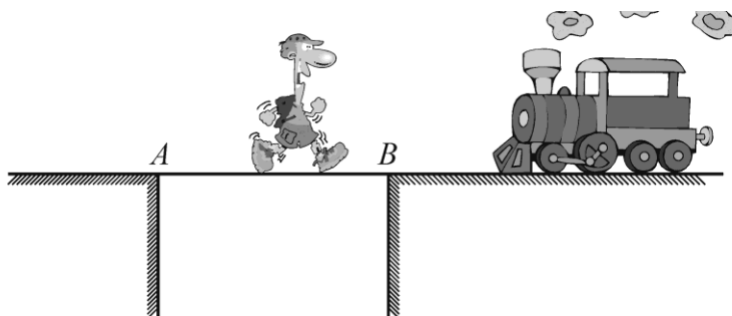
Сравните время движения на первой и второй половинах пути: какую долю всего времени автобус ехал быстро?

Ответ

Средняя скорость автобуса за первую треть времени движения равна $U_{\text{ср}} = \frac{15}{8} V_{\text{ср}} = 30$ км/ч.

6 Турист и поезд на мосту

Турист переходил узкий железнодорожный мост в направлении от точки A к точке B (см. рисунок). Находясь на расстоянии $d = 50$ м от середины моста, ближе к точке B , он увидел поезд, движущийся ему навстречу со скоростью $V = 54$ км/ч, который в этот момент находился на расстоянии $S = 300$ м от туриста. Турист побежал вперёд, навстречу поезду, с постоянной скоростью $v = 5$ м/с, и успел достигнуть точки B в момент, когда поезд находился на расстоянии $h = 60$ м от этой точки.



Успел бы турист добежать до точки A , если бы он, увидев поезд, мгновенно развернулся и побежал с такой же скоростью назад? Если да, то на каком расстоянии от точки A находился бы поезд в момент, когда турист достиг бы этой точки? Если нет, то на каком расстоянии от точки A поезд мог бы догнать его? Скорость поезда постоянна.

Подсказка

Найдите, какое расстояние турист пробежал до точки B и какое ему пришлось бы пробежать до A . Затем сравните время бега назад со временем, за которое поезд и турист сблизились бы (скорость сближения $V + v$ у встречного движения, $V - v$ у погони).

Ответ

Турист не успел бы добежать до точки A : поезд догнал бы его на расстоянии

$$L = \frac{v(S - h)}{V + v} + 2d - \frac{Sv}{V - v} = 10 \text{ м}$$

от точки A .

7 Лёд в зелёной жидкости

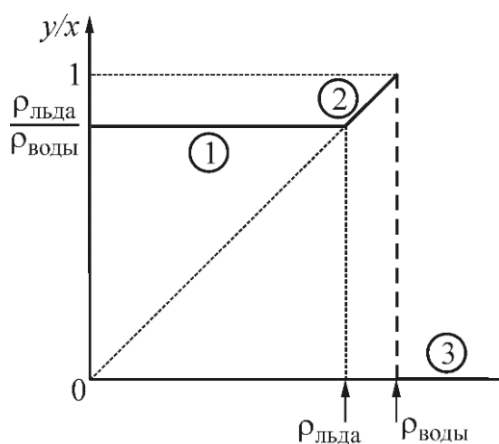
В цилиндрический стакан до половины налили зеленую жидкость, которая не смешивается и никак не реагирует с водой, после чего отметили на стенке уровень жидкости. Затем в стакан опустили маленький кусочек льда (объем кусочка гораздо меньше объёма жидкости). При этом уровень зеленой жидкости в стакане поднялся на величину x . После того, как весь лёд растаял, уровень зеленой жидкости над **начальной** отметкой составил y . Постройте график зависимости отношения y/x от плотности ρ зеленой жидкости.

Подсказка

Рассмотрите три случая: жидкость легче льда, плотность между плотностями льда и воды, жидкость тяжелее воды. Где окажется вода от растаявшего льда в каждом случае?

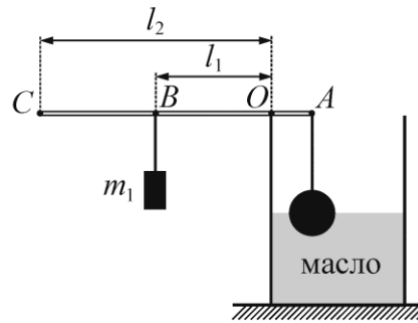
Ответ

График зависимости y/x от ρ : на участке $\rho < \rho_{\text{льда}}$ (1) отношение постоянно и равно $\rho_{\text{льда}}/\rho_{\text{воды}}$; на участке $\rho_{\text{льда}} \leq \rho < \rho_{\text{воды}}$ (2) оно растёт линейно, от $\rho_{\text{льда}}/\rho_{\text{воды}}$ до 1; при $\rho > \rho_{\text{воды}}$ (3) равно нулю.



8 Рычаг и шарик в масле и воде

К правому концу A стержня, масса которого пренебрежимо мала, подвесили на тонкой нити алюминиевый шарик. Стержень положили на край сосуда с машинным маслом (как показано на рисунке), а к точке B , находящейся на расстоянии $l_1 = 50$ см слева от точки опоры O , подвесили груз массой $m_1 = 2,3$ кг. При этом шарик оказался погружен в масло на половину своего объема. Затем груз m_1 сняли, а стержень с шаром перенесли и положили на край сосуда с водой так, что точка опоры O осталась прежней. Груз какой массой m_2 надо подвесить к другому концу стержня C , находящемуся на расстоянии $l_2 = 110$ см от точки O , чтобы алюминиевый шарик снова оказался погруженным на половину своего объема? Плотности алюминия, машинного масла и воды равны $\rho_a = 2700$ кг/м³, $\rho_m = 800$ кг/м³ и $\rho_v = 1000$ кг/м³, соответственно. Перед погружением шарика в воду его тщательно протерли от масла.



Подсказка

Сила, с которой нить тянет конец A , равна весу шарика минус сила Архимеда. Запишите правило моментов относительно O в обоих опытах и исключите неизвестное плечо OA и объём шарика.

Ответ

К другому концу стержня надо подвесить груз массой

$$m_2 = \left(\frac{2\rho_a - \rho_b}{2\rho_a - \rho_m} \right) \frac{l_1}{l_2} m_1 = 1 \text{ кг.}$$