

МОШ, 2015/16, заключительный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Туристы и два велосипеда

Группа из трех туристов должна перебраться из пункта A в пункт B по дороге длиной $S = 45$ км. Стартуют все туристы одновременно. На всю группу туристов есть только два велосипеда, причем если на велосипеде едут двое, то их скорость равна $3V$, а если на велосипеде едет один человек, то его скорость равна $4V$. Если же турист идет пешком, то его скорость движения равна $V = 5$ км/час. За какое минимальное время все туристы могут оказаться в пункте назначения? Временем посадки туристов на велосипед, а также временами разгона и торможения можно пренебречь.

Подсказка

Велосипеды можно оставлять на дороге и передавать дальше. Подумайте, как распределить участки пешком и на велосипеде, чтобы все трое прибыли одновременно, и составьте уравнение на это условие.

Ответ

$$T = \frac{13}{40} \cdot \frac{S}{V} = 2,925 \text{ часа} = 2 \text{ часа } 55 \text{ минут } 30 \text{ секунд.}$$

2 Удав, слон и попугай

С момента написания писателем Григорием Остером новелл про четверых друзей — Мартышку, Слоноенка, Удава и Попугая — прошло уже почти 40 лет. За это время Слоноенок вырос и превратился в СЛОНА, Удав стал еще длиннее, Попугай состарился и сгорбился, а Мартышка служит теперь чучелом в зоологическом музее. На очередном собрании друзья вспомнили, как они измеряли длину удава, и решили тряхнуть стариной. Удав, лежа на горизонтальном полу, вычислил расстояние от пола до своего центра масс, и оказалось, что оно равно 10 см. Центр масс Слона оказался на высоте 2 м над полом. Центр масс Удава и Слона вместе взятых находился на высоте 1,7 м. Когда на голову слона на высоте 3,5 м над полом сел Попугай, центр масс всех троих оказался выше еще на 0,5 мм. Какова масса Удава в Попугаях, если высота Попугая намного меньше толщины Удава?

Подсказка

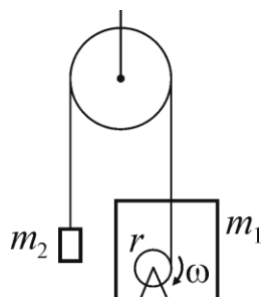
Запишите высоту центра масс системы как среднее взвешенное по массам. Сначала из двух тел найдите отношение масс Слона и Удава, затем добавьте Попугая.

Ответ

$$M_y \approx 568 M_{\text{п}} \text{ (из-за неточности вычислений допустимы значения от 560 до 570).}$$

3 Груз и ящик с катушкой

Невесомая нерастяжимая нить перекинута через идеальный блок. К одному концу нити прикреплен груз массой m_2 , а другой конец нити наматывается на невесомую катушку радиусом r , расположенную внутри ящика массой m_1 . Катушка вращается электродвигателем с постоянной угловой скоростью ω . Участки нити, не прилегающие к блоку и катушке, в процессе движения вертикальны, система крепления катушки к ящику и электродвигатель очень легкие. Найдите модуль ускорения a груза m_2 .



Подсказка

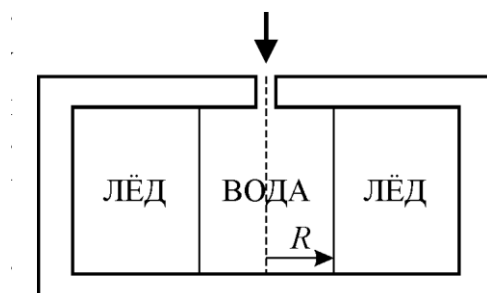
Скорость наматывания нити постоянна, поэтому ускорения тел связаны так же, как для нити постоянной длины. Какая сила действует на ящик со стороны нити?

Ответ

$$a_2 = \left| \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \right| g.$$

4 Таяние льда вокруг полости

В широком цилиндрическом калориметре (см. рис.), частично заполненном льдом при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$, во льду имеется цилиндрическая полость радиусом $R = 10\text{ см}$, которая сначала ничем не заполнена. В эту полость через небольшое отверстие сверху быстро залили воду, имевшую температуру $t = 10^\circ\text{C}$. Лёд начал таять, и, поскольку плотность льда меньше плотности воды, уровень воды начал опускаться. Но через отверстие сверху сразу стали доливать воду, так, чтобы полость в калориметре всё время была полностью заполнена водой. Температура доливаемой воды также равна t . Воду внутри калориметра постоянно перемешивают, так, чтобы лёд во всех точках таял с одинаковой скоростью. В некоторый момент температура воды в калориметре опустилась до $t_0 = 0^\circ\text{C}$, и лёд таять перестал. Найдите радиус полости, заполненной водой, в этот момент. Плотность воды $\rho_v = 1000\text{ кг/м}^3$, плотность льда $\rho_l = 900\text{ кг/м}^3$, удельная теплоёмкость воды $c = 4200\text{ Дж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 330\text{ кДж/кг}$.



Подсказка

Вся долитая вода остывает до $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и отдаёт тепло на плавление льда. Свяжите массу долитой воды с изменением объёма полости, а массу растаявшего льда — с радиусами полости.

Ответ

$$R_1 = \frac{R}{\sqrt{1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \cdot \frac{ct}{ct + \lambda}}} \approx 10,7 \text{ см.}$$

5 Очередь роботов на зарядке

На планете системы звезды Шедар один из пунктов зарядки роботов-исполнителей обслуживает по одному роботу со скоростью 60 роботов в час (р/ч). В один из дней роботы приходили на пункт в течение 8 часов. Первый час они приходили со скоростью 70 р/ч. В течение второго часа скорость поступления роботов равномерно увеличивалась, составив к его концу 80 р/ч. Потом в течение третьего часа скорость поступления роботов равномерно уменьшалась и упала к его концу обратно до 70 р/ч. На четвёртом часу скорость прихода роботов равномерно падала, составив к концу часа 20 р/ч, и потом оставалась такой в течение пятого и шестого часов. На седьмом часу опять был равномерный подъём скорости поступления роботов — до 100 р/ч в конце часа, а на восьмом часу — наблюдалось равномерное убывание скорости поступления до 60 р/ч. Роботы строго соблюдают очерёдность, а после зарядки сразу покидают пункт.

1. Сколько времени работал пункт в этот день, если были заряжены все роботы?
2. Какова наибольшая продолжительность пребывания робота на пункте зарядки (в очереди и на самой зарядке) в этот день?

Подсказка

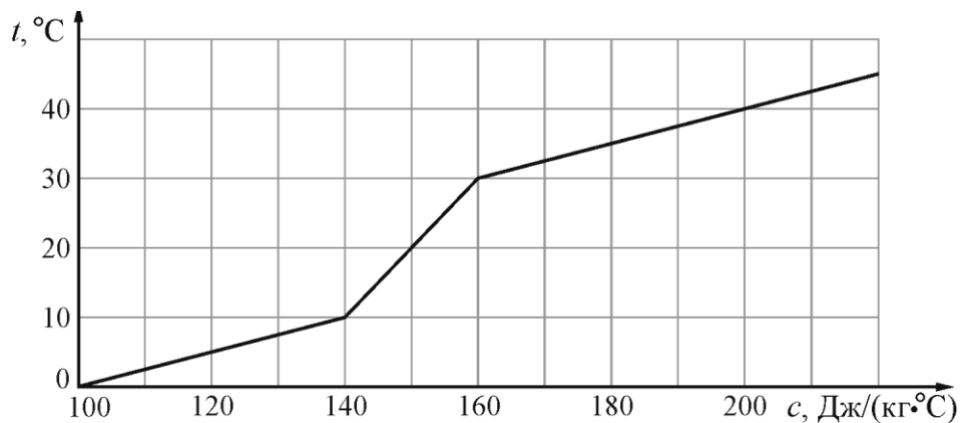
Число пришедших роботов за час — площадь под графиком скорости прихода (трапеция). Постройте таблицу числа роботов на пункте к концу каждого часа: очередь максимальна там, где приход сравнивается с обслуживанием.

Ответ

1) 8,5 часа; 2) 41 минута.

6 Вещество с переменной теплоёмкостью

В некой лаборатории было получено новое вещество неополитропен с удельной теплоемкостью c , изменяющейся в зависимости от его температуры t так, как показано на графике. Какая температура установится в калориметре, если в нем смешать равные массы неополитропена, взятые при температурах $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ и $+40\text{ }^{\circ}\text{C}$? Удельная теплоемкость калориметра мала, потерями теплоты можно пренебречь.



К задаче 2.

Подсказка

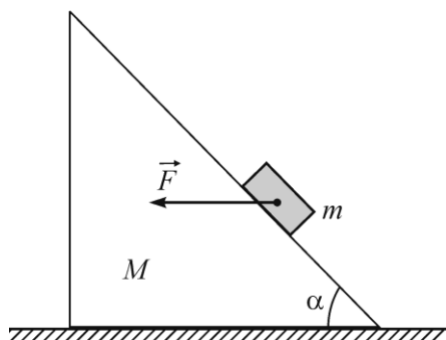
На каждом линейном участке графика теплоту можно считать через среднюю теплоёмкость. Составьте баланс для конечной температуры из диапазона $10\text{--}30\text{ }^{\circ}\text{C}$; получится квадратное уравнение.

Ответ

$$t_x = 10 (2\sqrt{58} - 13) \approx 22,3\text{ }^{\circ}\text{C}.$$

7 Клин и брусок под растущей силой

Клин массой $M = 5$ кг с углом при основании $\alpha = 45^\circ$ расположен на гладком горизонтальном столе. На наклонной поверхности клина лежит брусок массой $m = 1$ кг. На брусок начинает действовать сила, направленная горизонтально в сторону клина. Модуль этой силы возрастает с течением времени t по закону $F = \delta t$, где коэффициент пропорциональности $\delta = 1$ Н/с. Коэффициент трения между клином и бруском равен $\mu = 1,2$. Найдите модуль силы трения, действующей со стороны клина на брусок через время $T = 12$ с после начала действия силы F , если клин к этому моменту еще не начал опрокидываться. Ускорение свободного падения можно считать равным $g = 10$ м/с².



К задаче 3.

Подсказка

Пока брусок не проскальзывает, клин и брусок движутся как одно целое с общим ускорением. Запишите второй закон Ньютона для бруска в проекциях вдоль и поперёк наклонной плоскости.

Ответ

$F_{\text{тр}} = 0$ Н: в этот момент сила трения между телами отсутствует.

8 Игра с двумя реостатами

Алиса и Василиса играют в игру «Постоянный ток». Они соединили последовательно два реостата и идеальный амперметр, и подключили полученную цепь к источнику напряжения. Амперметр показал ток $I_0 = 100$ мА. Школьницы «ходят» по очереди. Одна двигает ползунок своего реостата, и показания амперметра меняются. Другая должна тоже подвинуть ползунок своего реостата, как можно быстрее вернув ток к прежнему значению. После этого «ход» переходит к ней. Реостаты у девушек разные, но на каждом из них ползунок перемещается прямолинейно и в начале игры находится в среднем положении. У Алисы расстояние между крайними возможными положениями ползунка равно $L_A = 36$ см, а у Василисы $L_B = 40$ см.

1. Первой «ходит» Алиса. Она сдвинула свой ползунок на 4 см вправо, и амперметр стал показывать ток $I_1 = 90$ мА. Василиса сдвинула свой ползунок на 5 см влево, и ток вернулся к прежнему значению. Теперь «ходит» Василиса. Она двигает ползунок на 6 см влево. На сколько и в каком направлении должна сдвинуть ползунок Алиса, отвечая на «ход» Василисы?

2. Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Алиса не сможет ответить на «ход» Василисы?
3. Может ли в течение игры возникнуть ситуация, когда Василиса не сможет ответить на «ход» Алисы?
4. Чему равно напряжение источника, если его внутреннее сопротивление $r = 4 \text{ Ом}$?

Подсказка

Сопротивление реостата пропорционально координате ползунка, а ток вернётся к прежнему значению, когда суммарное сопротивление цепи станет прежним. Из первого хода найдите отношение сопротивлений на единицу длины.

Ответ

- 1) Алиса должна сдвинуть ползунок вправо на 8,4 см; 2) не может; 3) может; 4) $U = 7,2 \text{ В}$.