

МОШ, 2016/17, отборочный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Падающий стержень и мгновенный центр

Вертикальный стержень длиной l стоит на гладкой горизонтальной поверхности. В какой-то момент он теряет устойчивость и падает. По какой траектории движется мгновенный центр вращения стержня во время его падения?

Подсказка

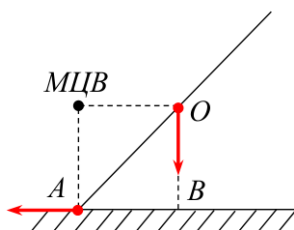
Куда направлена скорость центра масс, пока нет горизонтальных сил? А скорость нижнего конца? Мгновенный центр лежит на перпендикулярах к этим скоростям.

Ответ

Мгновенный центр вращения движется по четверти окружности радиусом $l/2$.

Решение

Вдоль поверхности на стержень не действует внешних сил, следовательно, центр масс системы движется вдоль вертикальной линии. Нижняя точка A стержня движется горизонтально без отрыва от поверхности. Положение мгновенного центра вращения (МЦВ) в произвольный момент указано на рисунке. Расстояние от точки B до МЦВ в любой момент времени равно $l/2$. Следовательно, МЦВ движется вдоль четверти окружности радиусом $l/2$.



2 Газ в трубе с поршнем и теплом

В горизонтальной трубе сечением S , закрытой с торцов, находится одноатомный газ, разделённый на 2 части теплонепроницаемым поршнем, который может свободно перемещаться в трубе. Начальное давление газа равно p . На сколько сместится поршень, если через левый торец к газу подвести количество теплоты Q , а через правый — такое же количество теплоты отвести? Боковые стенки тепло не пропускают. Процесс считать квазистатическим.

Подсказка

Как изменится суммарная внутренняя энергия газа? Как давление одноатомного газа связано с энергией единицы объёма?

Ответ

$$\Delta x = \frac{2}{5} \frac{Q}{pS}.$$

Решение

Из основного уравнения МКТ давление есть $p = \frac{2}{3} n \bar{w} = \frac{2}{3} u$, где n — концентрация газа, $\bar{w}$ — средняя кинетическая энергия одной частицы, u — плотность внутренней энергии газа (энергия единицы объёма). Заметим, что внутренняя энергия всего газа в ходе процесса не меняется, следовательно, процесс изобарический (так как $u = \text{const}$). Количество теплоты, подведённое газу, который расположен в левой части цилиндра, равно:

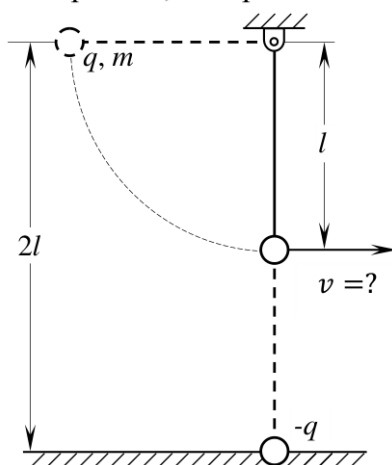
$$Q = \frac{c_p}{R} p S \Delta x \implies \Delta x = \frac{2}{5} \frac{Q}{pS},$$

где Δx — искомое смещение поршня.

3 Маятник и неподвижный заряд

Математический маятник массой m и длиной l , несущий заряд q , отклонили в горизонтальное положение и отпустили без начальной скорости. Найти скорость v шарика в момент прохождения положения равновесия. Нижний заряд $-q$, расположенный на одной вертикали с точкой подвеса, закреплён.

м поршнем, который может



Подсказка

Кроме силы тяжести работу совершает кулоновская сила; удобно записать закон сохранения энергии с учётом энергии взаимодействия зарядов в начале (расстояние $\sqrt{5}l$) и в конце (расстояние l).

Ответ

$$v = \sqrt{2 \left(gl + k \frac{q^2}{lm} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right] \right)}.$$

Решение

Запишем закон сохранения энергии для грузика массой m :

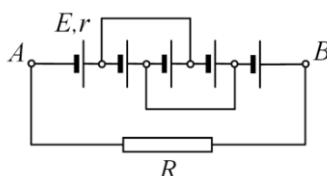
$$mgl - k \frac{q^2}{\sqrt{5}l} = \frac{mv^2}{2} - k \frac{q^2}{l},$$

отсюда получаем:

$$v = \sqrt{2 \left(gl + k \frac{q^2}{lm} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right] \right)}.$$

4 Ток в схеме одинаковых источников

Найти ток I через резистор с сопротивлением $R = 5$ Ом в схеме, изображённой на рисунке. Все источники одинаковые и имеют ЭДС $E = 15$ В и внутреннее сопротивление $r = 2$ Ом. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.



Подсказка

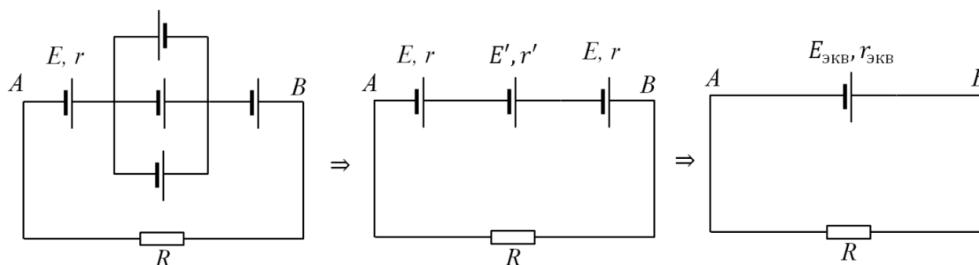
Сначала замените три параллельно включённых источника одним эквивалентным (найдите его ЭДС и внутреннее сопротивление), затем сложите последовательные источники.

Ответ

$$I = \frac{7E}{7r + 3R} \approx 3,6 \text{ A}.$$

Решение

Преобразуем исходную схему (см. рисунок, первая схема).



Три параллельных источника заменим на эквивалентный источник с параметрами (см. рисунок, вторая схема):

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{3}{r} \Rightarrow r' = \frac{r}{3}, \quad E' = r' \sum I_{\text{токов короткого замыкания}} = r' \left(\frac{E}{r} + \frac{E}{r} + \frac{E}{r} \right) = \frac{E}{3}.$$

Три последовательных источника заменим на эквивалентный источник с параметрами (см. рисунок, третья схема):

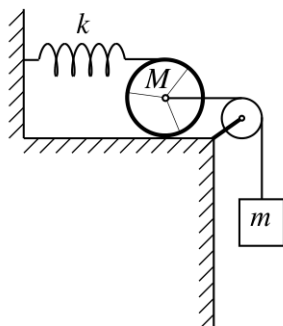
$$r_{\text{экв.}} = r + r + \frac{r}{3} = \frac{7}{3}r, \quad E_{\text{экв.}} = E + E + \frac{E}{3} = \frac{7}{3}E.$$

Следовательно,

$$I = \frac{E_{\text{экв.}}}{r_{\text{экв.}} + R} = \frac{7E}{7r + 3R} \approx 3,6 \text{ A}.$$

5 Малые колебания груза и обруча

Найти собственную частоту малых колебаний груза m в системе, изображённой на рисунке. Обруч M катается без проскальзывания, массой спиц по сравнению с массой обруча пренебречь.



Подсказка

Свяжите смещение груза со смещением верхней точки обруча, к которой прикреплена пружина, и запишите полную энергию системы через скорость груза.

Ответ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m + 2M}}.$$

Решение

Пусть груз массой m отклонился от положения равновесия на x вниз. Тогда деформация пружины равна $2x$, так как обруч движется без проскальзывания. Полная энергия системы равна:

$$E = -mgx + \frac{m\dot{x}^2}{2} + M\dot{x}^2 + 4 \frac{kx^2}{2} = \text{const}.$$

Продифференцировав это выражение по времени, получаем:

$$-mg\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} + 2M\dot{x}\ddot{x} + 4kx\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \frac{4k}{m + 2M} \left(x - \frac{mg}{4k} \right) = 0.$$

Окончательно получаем:

$$\omega_0^2 = \frac{4k}{m + 2M}.$$

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2016/17, отборочный этап, 11 класс — условия, решения. Задачи перенесены на botay.pro, решения — по официальным.