

МОШ, 2016/17, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Анемометры на двух баржах

Две самоходные баржи равномерно движутся по озеру во взаимно перпендикулярных направлениях. Скорость одной баржи $V_1 = 3$ м/с, а другой $V_2 = 4$ м/с. На каждой барже установлен анемометр — прибор для измерения модуля скорости ветра. В течение некоторого времени на каждом из кораблей каждую минуту снимают показания анемометров. По результатам измерений обнаружилось, что значения скорости ветра, полученные на первой барже, не превышали скорости баржи V_1 , а на второй — не превышали V_2 . Какого максимального значения могла достигать скорость ветра относительно озера во время измерений? Какой угол α составляла скорость первой баржи $\vec{V}_1$ с направлением ветра в момент, когда скорость ветра относительно озера была максимальной?

Подсказка

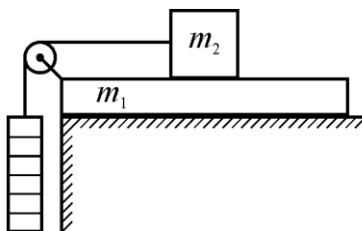
Скорость ветра относительно баржи — это разность скорости ветра и скорости баржи. Нарисуйте векторы скорости ветра относительно озера и относительно барж из одной точки: где может лежать конец вектора скорости ветра?

Ответ

$$w_{\max} = \frac{2V_1V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = 4,8 \text{ м/с}; \quad \alpha = \arccos \frac{V_2}{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}} = \arccos \frac{4}{5} \approx 37^\circ.$$

2 Доска и брусок с гирьками

На горизонтальном столе лежит доска массой $m_1 = 1$ кг, на которой находится брусок массой $m_2 = 2$ кг. К бруску привязана лёгкая нерастяжимая нить, второй конец которой перекинут через идеальный блок, закреплённый на краю доски. Коэффициент трения между доской и бруском $\mu = 0,2$. Вертикальный участок нити начинают аккуратно нагружать одинаковыми гирьками массами $\Delta m = 75$ г каждая. При каком минимальном количестве n гирек система придёт в движение? Найдите модули и направления ускорений, с которыми в этом случае начнут двигаться доска и брусок. Трением между доской и поверхностью стола можно пренебречь, модуль ускорения свободного падения можно принять равным $g = 10$ м/с².



Подсказка

Движение начнётся, когда сила натяжения нити сможет превысить максимальную силу трения покоя между бруском и доской. Затем запишите второй закон Ньютона для бруска, доски и гирек и свяжите их ускорения условием нерастяжимости нити.

Ответ

Система придёт в движение при минимальном количестве гирек $n = 6$; доска начнёт дви-

гаться с ускорением $a_{1x} = \frac{1 - \frac{\mu m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{6\Delta m}{m_1}} g \approx 0,3 \text{ м/с}^2$, направленным вправо; брусок начнёт

двигаться с ускорением $|a_{2x}| = \frac{\frac{\mu m_2}{m_2} - 1}{1 + \frac{m_2}{m_1} + \frac{6\Delta m}{m_2}} g \approx 0,17 \text{ м/с}^2$, направленным влево.

3 Сила на частицу и работа

Частица массой m , свободно летящая со скоростью V , попадает в область пространства, в которой в течение времени $\tau = 1 \text{ с}$ на неё действует постоянная по модулю и направлению сила $\vec{F}$. К моменту прекращения действия этой силы частица движется со скоростью $2V$ в направлении, перпендикулярном первоначальному. Какое время потребовалось бы такой же по модулю и направлению силе, чтобы совершить над частицей вдвое большую работу (при той же начальной скорости частицы)? Влиянием других сил пренебречь.

Подсказка

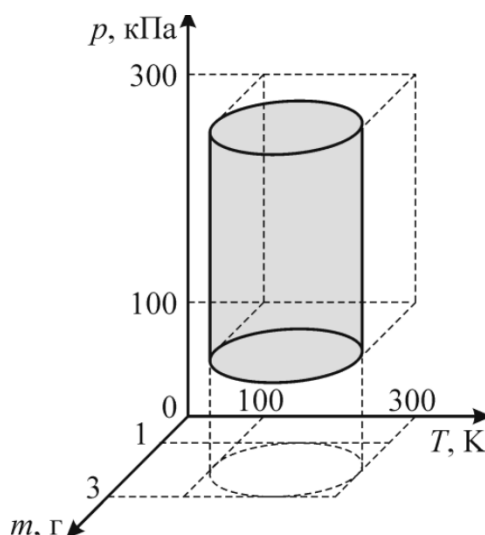
Работа силы равна изменению кинетической энергии, а изменение импульса за время t равно $\vec{F}t$. Из первого опыта выразите $F\tau$ через mV и найдите скорость частицы во втором случае.

Ответ

$$t = \frac{1 + \sqrt{31}}{5} \tau \approx 1,3 \text{ с.}$$

4 Кислород в p – T – m -ограничениях

Кислород находится в специальном устройстве, которое обеспечивает ограничение на возможные значения объёма, давления p , температуры T и массы m газа. Все возможные значения p , T и m , будучи нанесёнными на трёхмерную p – T – m -диаграмму (см. рис.), лежат внутри цилиндрической поверхности, ограниченной диапазонами изменения давления от 100 кПа до 300 кПа, массы от 1 г до 3 г и температуры от 100 К до 300 К. Найдите минимальное и максимальное значение, которое может принимать объём газа, и укажите значения p , T и m , которые соответствуют этим состояниям. Молярная масса кислорода $\mu = 32$ г/моль.



Подсказка

Из уравнения состояния $V = mRT/(\mu p)$. Давление в числителе и знаменателе стоит по-разному, а вот m и T входят в виде произведения mT : при каких значениях m и T в области, заданной цилиндром, это произведение экстремально?

Ответ

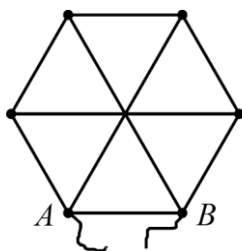
$$V_{\min} = \frac{\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 m_0 T_0 R}{\mu p_{\max}} \approx 0,145 \text{ л}, \quad V_{\max} = \frac{\left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 m_0 T_0 R}{\mu p_{\min}} \approx 1,903 \text{ л, где } m_0 = 1 \text{ г и } T_0 = 100 \text{ К.}$$

Минимальное значение объёма достигается при $p = 300$ кПа, $m = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m_0 \approx 1,29$ г и $T = \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) T_0 \approx 129$ К.

Максимальное значение объёма достигается при $p = 100$ кПа, $m = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) m_0 \approx 2,71$ г и $T = \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) T_0 \approx 271$ К.

5 Проволочная сетка между А и В

Определите сопротивление R_{AB} между точками А и В проволочной сетки, показанной на рисунке. Сопротивление каждого из проводников (вне зависимости от его длины), из которых спаяна сетка, равно R . Места спайки проводников обозначены точками. В центре сетки электрический контакт отсутствует.



Подсказка

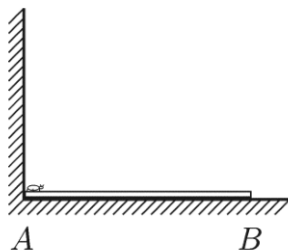
Используйте симметрию относительно оси, проходящей через середину отрезка AB : найдите узлы с равными потенциалами или расставьте токи по симметричным ветвям и выразите их через один неизвестный ток.

Ответ

$$R_{AB} = \frac{5}{9} R.$$

6 Букашка на падающем стержне

Жёсткий стержень AB длиной L лежит на горизонтальном полу, придвинутый одним из своих концов вплотную к вертикальной стене, как показано на рисунке. В точке A сидит букашка. В тот момент, когда конец A стержня начали двигать вверх вдоль стены с постоянной по модулю скоростью V , букашка поползла по стержню с постоянной относительно стержня скоростью u в направлении конца B , который скользит по полу, не отрываясь от него. Найдите максимальное расстояние S от стенки до букашки в процессе её движения по стержню.



Подсказка

Выразите расстояние от букашки до стенки через угол наклона стержня и пройденный букашкой путь. Подумайте, при каком угле наклона это расстояние максимально и успеет ли букашка добраться до конца стержня к этому моменту.

Ответ

$$S = \frac{u}{V} \cdot \frac{L}{2} \text{ при } u < \sqrt{2} V; \quad S = L \sqrt{1 - \left(\frac{V}{u}\right)^2} \text{ при } u \geq \sqrt{2} V.$$

7 Пластин падает на брусок

По закреплённой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, скользил брусок массой $2m$, двигаясь с постоянной скоростью V . Сверху без начальной скорости отпустили кусок пластилина массой m . Пролетев расстояние H , пластилин упал на брусок и прилип к нему. Какое количество теплоты выделилось за время соударения? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.

Подсказка

Во время удара сохраняется проекция импульса системы на направление наклонной плоскости (вдоль неё внешние силы малы по сравнению с ударными). Затем найдите потерю механической энергии.

Ответ

$$\Delta Q = m \left(gH + \frac{V^2}{3} \right).$$

8 Брусок поворачивается в воде

Деревянный брусок плотностью $\rho = 500 \text{ кг/м}^3$ в форме прямоугольного параллелепипеда имеет длину $L = 1 \text{ м}$ и квадратное поперечное сечение со стороной $a = 10 \text{ см}$. Брусок опустили в воду большого озера и удерживали его в таком неустойчивом положении равновесия, что одна из длинных граней бруска была сухой и горизонтальной, при этом половина объёма бруска была погружена в воду. Брусок отпустили, и он принял устойчивое положение, повернувшись вокруг своей оси симметрии на угол 45° . На сколько в результате этого уменьшилась потенциальная энергия системы «вода + брусок»? Плотность воды равна 2ρ .

Подсказка

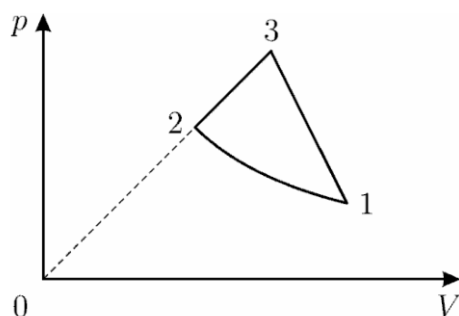
Центр масс бруска при повороте не смещается. Изменение потенциальной энергии системы равно работе силы тяжести при «вынимании» бруска из воды в первом положении (вода заполняет выемку) и «доставании» воды из выемки, в которую брусок погружается во втором положении.

Ответ

$$\Delta U = \frac{\rho g L a^3}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \approx 71,5 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

9 Цикл с изотермой, максимум Т

Один моль идеального одноатомного газа совершает замкнутый цикл, состоящий из изотермы 1–2 и процессов 2–3 и 3–1, в которых давление является линейной функцией объёма, как показано на рисунке. Известно, что в состояниях 1 и 2 давление газа равно p_1 и p_2 соответственно. При каких давлениях в состоянии 3 в нём достигается максимальная температура газа за весь цикл?



Подсказка

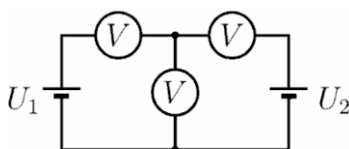
Запишите уравнение прямой 3–1 и выясните, при каком объёме температура на ней максимальна. Максимум температуры за цикл достигается в точке 3, если этот объём не меньше объёма в состоянии 3; используйте уравнение изотермы 1–2 и связь объёмов.

Ответ

Максимальная температура газа за весь цикл достигается в состоянии 3 при условии, что давление в этом состоянии $p_3 \geq \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1}$.

10 Три вольтметра и две батареи

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, собрана из двух батарей с ЭДС $U_1 = 36$ В и $U_2 = 12$ В, а также трёх вольтметров. Сопротивление у одного из этих приборов в два раза меньше, чем у каждого из двух других. При этом сопротивление у каждого из вольтметров всё равно значительно больше внутреннего сопротивления каждой батареи. Известно, что один из вольтметров показывает напряжение 24 В.



1. Какой именно вольтметр показывает 24 В?
2. Что показывают остальные вольтметры?
3. Определите, где включен вольтметр с малым сопротивлением, а где — вольтметры с большим сопротивлением.

Подсказка

Переберите, какой из трёх приборов имеет малое сопротивление, и в каждом случае найдите показания по правилам Кирхгофа: сопротивления вольтметров велики, так что внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

Ответ

1) 24 В показывает первый вольтметр; 2) два остальных вольтметра показывают 0 В и 12 В; 3) малое сопротивление имеет третий вольтметр, а два других вольтметра имеют большие сопротивления.