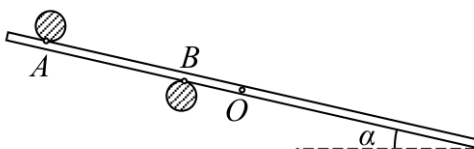


МОШ, 2017/18, отборочный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Стержень на двух валиках

Стержень лежит на двух горизонтальных валиках, касаясь их в точках A и B . Известны длина отрезка $AB = a$ и расстояние b между точкой A и центром тяжести прута O . Найдите коэффициент трения μ между валиком B и стержнем, если валик A гладкий, а прут образует с горизонтом угол α .



Подсказка

Три силы, действующие на стержень (две реакции и сила тяжести), уравновешены. Выберите точку, где пересекаются линии действия двух из них, и запишите моменты относительно неё.

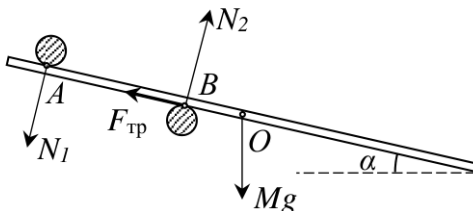
Ответ

$$\mu \geq \frac{a}{b \operatorname{tg} \alpha}.$$

Решение

На рисунке указаны силы, действующие на стержень. Рассмотрим граничный случай, когда стержень покоится при минимальном значении коэффициента трения μ . Запишем уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия сил N_1 и Mg :

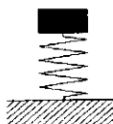
$$F_{\text{тр}} b \operatorname{tg} \alpha = N_2 a.$$



Из закона Амонтона-Кулона $F_{\text{тр}} = \mu N_2$. Значит, $\mu = \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha$. Окончательно получаем $\mu \geq \frac{a}{b} \operatorname{tg} \alpha$.

2 Гиря на лёгкой пружине

На лёгкой пружине уравновешена гиря. Деформация пружины при этом составляет $x = 5$ см. Чтобы увеличить деформацию пружины вдвое, медленно приподнимая груз в вертикальном направлении, надо совершить работу $A = 9$ Дж. Найдите жёсткость пружины.



Подсказка

Запишите баланс энергии между начальным положением и положением с вдвое большей деформацией: работа внешней силы идёт на изменение упругой энергии и потенциальной энергии в поле тяжести. Массу исключите из условия равновесия.

Ответ

$$k = \frac{2A}{9x^2} \approx 800 \text{ Н/м.}$$

Решение

Условие равновесия гири в начальный момент: $mg = kx$, где m — масса гири, k — жёсткость пружины. Запишем закон сохранения энергии, приняв «нулевой» уровень потенциальной энергии силы тяжести в начальном положении гири:

$$\frac{kx^2}{2} + A = 3mgx + \frac{k(2x)^2}{2} \Rightarrow A = \frac{3}{2}kx^2 + 3kx^2 \Rightarrow k = \frac{2A}{9x^2} \approx 800 \text{ Н/м.}$$

3 Кислород и водород под поршнем

В сосуде под поршнем находится некоторая масса кислорода при температуре $2T$. В него закачивают ещё такую же массу водорода, а температуру понижают до T . Найдите, во сколько раз изменился объём содержимого под поршнем. Газы считать идеальными. Молярная масса кислорода 32 г/моль, водорода 2 г/моль.

Подсказка

Давление под поршнем в обоих состояниях одинаково. Запишите уравнение состояния для начального и конечного состояний и разделите одно на другое.

Ответ

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = 8,5.$$

Решение

Запишем два уравнения состояния для начального состояния и для конечного:

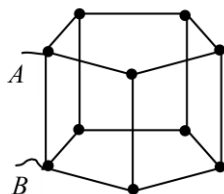
$$pV_1 = \frac{m}{\mu_1} R \cdot 2T, \quad pV_2 = \left(\frac{m}{\mu_1} + \frac{m}{\mu_2} \right) R \cdot T.$$

Разделив одно уравнение на другое, получаем

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}}{\frac{2}{\mu_1}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = 8,5.$$

4 Проволочная сетка

Определите эквивалентное сопротивление проволочной сетки между узлами A и B , если сопротивление каждого проводника равно R .



В тексте варианта А фраза обрывается на слове «проводника»; «равно R » взято из вариантов В–F и из решения.

Подсказка

Из симметрии призмы узлы с равными потенциалами можно объединить. Перерисуйте сетку в виде лестницы из параллельных и последовательных участков.

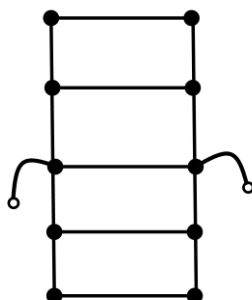
Ответ

$$R_{AB} = \frac{11}{19} R.$$

Решение

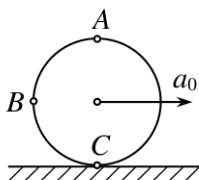
Эквивалентная схема представлена на рисунке. Воспользовавшись формулами для параллельного и последовательного соединений, окончательно получаем

$$R_{AB} = \frac{11}{19} R.$$



5 Ускорения точек катящегося колеса

Колесо катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Ускорение центра колеса равно a_0 . Найдите значения ускорений точек A и B колеса в момент времени, когда ускорение точки C становится равным по модулю a_0 .



Подсказка

Перейдите в систему отсчёта, поступательно движущуюся вместе с центром колеса: в ней все точки обода движутся по окружности. Не забудьте добавить ускорение этой системы.

Ответ

$$a_A = a_B = \sqrt{5} a_0.$$

Решение

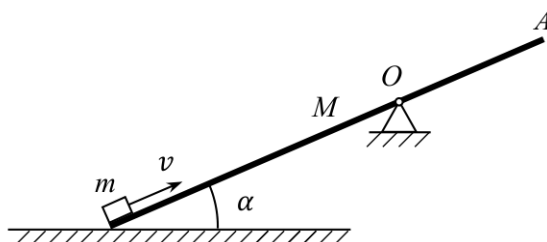
В поступательно движущейся системе отсчёта, скорость которой совпадает со скоростью центра колеса, все точки движутся по окружностям. В отсутствие проскальзывания тангенциальное ускорение точек обода равно ускорению центра колеса относительно земли. Нормальное ускорение точек обода для указанного в условии момента времени также равно по величине a_0 . Следовательно, ускорение точки A в исходной системе отсчёта в рассматриваемый момент равно векторной сумме направленного вертикально вниз нормального ускорения a_0 и горизонтального ускорения $2a_0$ и составляет по величине

$$a_A = \sqrt{a_0^2 + (2a_0)^2} = \sqrt{5} a_0.$$

Ускорение точки B в исходной системе отсчёта в рассматриваемый момент равно векторной сумме направленного вертикально вверх ускорения a_0 и горизонтального ускорения $2a_0$ и составляет по величине $\sqrt{5} a_0$.

6 Груз на шарнирной доске

Груз массой m толкнули вверх по гладкой доске массой M и длиной l , шарнирно закреплённой в точке O (см. рис.). Доска с горизонтом составляет угол α , расстояние $OA = h < \frac{l}{2}$. Какую скорость v нужно сообщить грузу, чтобы нижний конец доски оторвался от пола?



Подсказка

Нижний конец доски отрывается, когда момент силы давления груза относительно шарнира сравнивается с моментом силы тяжести доски. Найдите, на каком расстоянии от O это происходит, и дальше используйте закон сохранения энергии.

Ответ

Если $\frac{M}{m} < \frac{2h}{l-2h}$, то $v \geq \sqrt{2g \left(l - h + \frac{M}{m} \cdot \frac{l-2h}{2} \right) \sin \alpha}$; при $\frac{M}{m} > \frac{2h}{l-2h}$ доска не оторвётся ни при какой скорости.

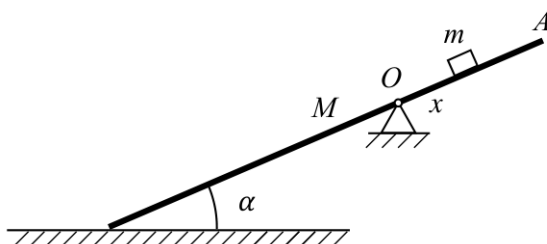
Решение

Запишем второй закон Ньютона в проекциях на нормаль к доске для груза:

$$N = mg \cos \alpha,$$

где N — нормальная реакция опоры. Запишем уравнение моментов для доски относительно точки O (груз m на расстоянии x от точки O , доска начинает отрываться от пола):

$$Mg \cdot \left(\frac{l}{2} - h \right) \cos \alpha = Nx = mgx \cos \alpha \implies x = \frac{M}{m} \cdot \frac{l-2h}{2}.$$



1. Если

$$\frac{M}{m} \cdot \frac{l-2h}{2} > h \implies \frac{M}{m} > \frac{2h}{l-2h},$$

то не существует таких скоростей, при которых доска оторвётся от пола.

2. Если

$$\frac{M}{m} < \frac{2h}{l-2h},$$

тогда из закона сохранения энергии следует

$$\frac{mv^2}{2} \geq mg(l-h+x) \sin \alpha \implies v \geq \sqrt{2g \left(l - h + \frac{M}{m} \cdot \frac{l-2h}{2} \right) \sin \alpha}.$$

7 Процесс $p = \alpha V$

Над одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс $p = \alpha V$, где $\alpha = 273 \text{ Па/м}^3$. При этом оказалось, что сумма увеличения ΔU внутренней энергии газа и полученной теплоты Q равна $\Delta U + Q = 70 \text{ Дж}$. Найдите Q .

Подсказка

Выразите работу газа через изменение температуры: для процесса $p = \alpha V$ она пропорциональна ΔT . Тогда процесс имеет постоянную молярную теплоёмкость, и Q и ΔU связаны через неё.

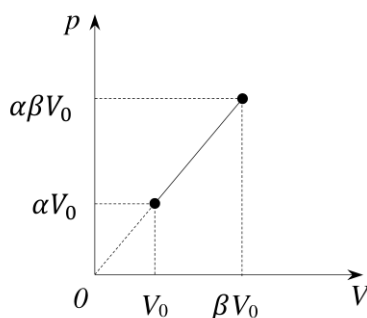
Ответ

$$Q = 40 \text{ Дж.}$$

Решение

Рассмотрим процесс $p = \alpha V$. Пусть объём увеличился в β раз. Запишем первое начало термодинамики:

$$\begin{aligned} Q = \Delta U + A &= c_V \Delta T + \frac{1}{2}(\alpha \beta V_0 + \alpha V_0)(\beta V_0 - V_0) = c_V \Delta T + \frac{1}{2}(\beta^2 - 1)\alpha V_0^2 = \\ &= c_V \Delta T + \frac{1}{2}R \Delta T = \frac{c_V + c_p}{2} \Delta T. \end{aligned}$$



Т.е. это процесс с постоянной молярной теплоёмкостью (политропный процесс), равной $c_\alpha = \frac{c_V + c_p}{2} = 2R$. Так как

$$\Delta U + Q = (c_\alpha + c_V)\Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta U + Q}{c_\alpha + c_V},$$

следовательно,

$$Q = c_\alpha \Delta T = c_\alpha \cdot \frac{\Delta U + Q}{c_\alpha + c_V} = \frac{2 \cdot 70}{3,5} = 40 \text{ Дж.}$$

8 Заряженный шарик в поле

Равномерно заряженный по объёму шарик радиусом R внесли в однородное электрическое поле напряжённостью E_0 . Максимальный угол между векторами напряжённости результирующего поля и поля E_0 оказался равным 60° . Найдите заряд шарика, если после его внесения во внешнее поле распределение заряда не изменилось.

Подсказка

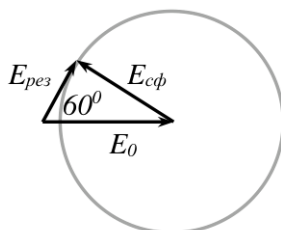
Максимальный угол достигается там, где поле шарика наибольшее, а результирующая напряжённость перпендикулярна напряжённости поля шарика. Нарисуйте векторный треугольник.

Ответ

$$Q = 2\sqrt{3} \pi \epsilon_0 E_0 R^2.$$

Решение

Существование максимального угла, меньшего 180° , между вектором напряжённости результирующего поля и вектором $\vec{E}_0$ означает, что в любой точке напряжённость поля, создаваемого шариком, меньше E_0 . При фиксированном значении заряда шарика максимальный угол между вектором напряжённости результирующего поля и вектором $\vec{E}_0$ достигается в тех точках, где напряжённость поля шара максимальна (на поверхности шарика) и ориентирована так, что результирующее поле перпендикулярно полю сферы (см. рис.). Из рисунка видно, что



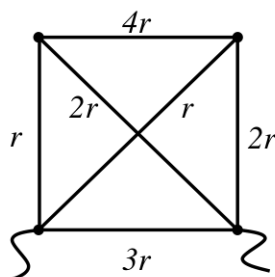
$$E_{сф} = E_0 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0.$$

Поле равномерно заряженного по объёму шарика на его поверхности равно

$$E_{сф} = k \frac{Q}{R^2} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{E_0 R^2}{k} = 2\sqrt{3} \pi \varepsilon_0 E_0 R^2.$$

9 Сопротивление схемы с диагоналями

Определите общее сопротивление схемы, указанной на рисунке. Диагонали квадрата в центре контакта не имеют.



Подсказка

Проверьте, не образуют ли четыре резистора с сопротивлениями $r, r, 2r, 2r$ сбалансированный мост.

Ответ

$$R = r.$$

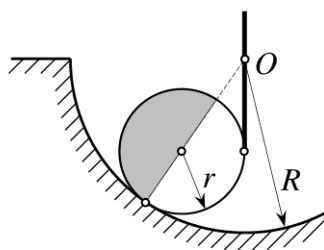
Решение

Сопротивления $r, r, 2r, 2r, 4r$ образуют сбалансированный мост, значит, через сопротивление $4r$ ток не течёт.

Эквивалентная схема — три параллельно соединённых сопротивления $3r, 3r, 3r$. Следовательно, общее сопротивление равно r .

10 Сфера с воском в лунке

Сферическую оболочку наполовину заполнили воском, и воск застыл. Сферу удерживают вертикальной нитью в неподвижной полусферической лунке, как показано на рисунке. При каких значениях коэффициента трения μ сфера с воском будет покоиться? Радиус сферы равен r , радиус лунки $R > 2r$, нить проходит через центр лунки O .



Подсказка

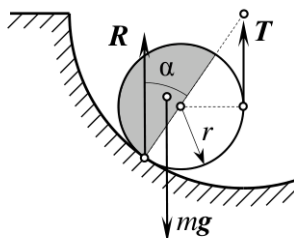
На сферу действуют три силы. Две из них вертикальны, значит, и третья вертикальна. Каков при этом угол между реакцией лунки и нормалью в точке касания?

Ответ

$$\mu \geq \frac{r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}.$$

Решение

Сферическая оболочка находится в равновесии под действием трёх сил: тяжести $m\vec{g}$, натяжения $\vec{T}$ и реакции чаши $\vec{R}$. Две первые направлены вертикально, следовательно, третья тоже должна быть направлена вертикально, отклоняясь от нормали на угол α . Поскольку этот угол не может быть больше угла трения, $\mu \geq \operatorname{tg} \alpha$ и не зависит от распределения масс сферы и воска.



Из рисунка находим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\sqrt{(R-r)^2 - r^2}} = \frac{r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}} \Rightarrow \mu \geq \frac{r}{\sqrt{R^2 - 2Rr}}.$$

11 Газ под поршнем: Q и ΔU

Идеальному газу, находящемуся в вертикальном цилиндре под невесомым подвижным поршнем, сообщают количество теплоты $Q = 300$ Дж. Внутренняя энергия газа при этом увеличивается на $\Delta U = 200$ Дж. Найдите изменение объёма газа и определите его молярную теплоёмкость при постоянном объёме. Внешнее атмосферное давление равно $P_A = 100$ кПа.

Подсказка

Поршень невесом, поэтому давление газа постоянно и равно атмосферному: процесс изобарический. Работа газа выражается через ΔV , а изменение внутренней энергии — через c_V и ΔT .

Ответ

$\Delta V = 1$ л; $c_V = 2R$.

Решение

Процесс изобарический, поэтому работа газа равна $P_A \Delta V$. Из первого начала термодинамики следует:

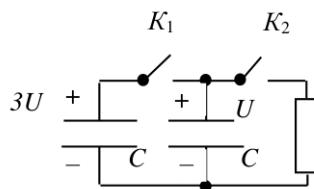
$$Q = \Delta U + P_A \Delta V \Rightarrow \Delta V = \frac{Q - \Delta U}{P_A} = 1 \text{ л.}$$

Изменение внутренней энергии равно:

$$\Delta U = \nu c_V \Delta T = c_V \frac{P_A \Delta V}{R} \Rightarrow c_V = \frac{\Delta U R}{P_A \Delta V} = 2R.$$

12 Два конденсатора и два ключа

Электрическая цепь состоит из двух конденсаторов ёмкостью C каждый, разомкнутых ключей K_1 и K_2 и резистора (см. рисунок). Один из конденсаторов изначально заряжен до напряжения U , а второй — до напряжения $3U$. Во сколько раз будут отличаться количества теплоты, выделившиеся в резисторе, в зависимости от того, в каком порядке произойдёт замыкание ключей (сначала K_1 , а потом K_2 или сначала K_2 , а затем K_1)? После замыкания каждого ключа проходит достаточно большое время. Сопротивление соединительных проводов значительно меньше сопротивления резистора.



Подсказка

При быстрой перезарядке через провода заряд делится поровну (с потерями на излучение), а через резистор конденсатор разряжается полностью, и выделяется вся его энергия. Сосчитайте энергию, оставшуюся после каждого шага.

Ответ

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{16}{11}.$$

Решение

Если сначала замкнуть ключ K_1 , то произойдёт быстрая перезарядка конденсаторов, при которой начальный заряд перераспределится поровну между двумя конденсаторами, то есть каждый конденсатор окажется заряженным до напряжения $2U$. При этом сила текущего через соединительные провода тока будет велика, и ощутимая часть энергии будет потеряна из-за излучения. Количество теплоты, которое затем выделится в резисторе после замыкания ключа K_2 , равно

$$Q_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} C (2U)^2 = 4CU^2.$$

Если сначала замкнуть ключ K_2 , то в резисторе выделится количество теплоты, равное энергии заряженного конденсатора $\frac{CU^2}{2}$. Если затем замкнуть ключ K_1 , то сначала произойдёт быстрая перезарядка конденсаторов, при которой начальный заряд перераспределится поровну между двумя конденсаторами, т.е. каждый конденсатор окажется заряженным до напряжения $3U/2$. Затем конденсаторы будут разряжаться через резистор. Тогда суммарное выделившееся количество теплоты в этом случае равно:

$$Q_2 = \frac{CU^2}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} C \left(\frac{3}{2} U \right)^2 = \frac{11}{4} CU^2.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{16}{11}.$$

13 Частица в скрещенных полях

Частица с зарядом q движется вдоль прямой с постоянной скоростью v в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях с напряжённостью $\vec{E}$ и индукцией $\vec{B}$, т.е. векторы полей перпендикулярны друг другу ($\vec{E} \perp \vec{B}$). Найдите модуль силы вязкого трения, действующей на эту частицу.

Подсказка

Скорость постоянна, значит, сумма трёх сил равна нулю. Сила Лоренца перпендикулярна скорости, а сила вязкого трения направлена против скорости: нарисуйте векторный треугольник сил.

Ответ

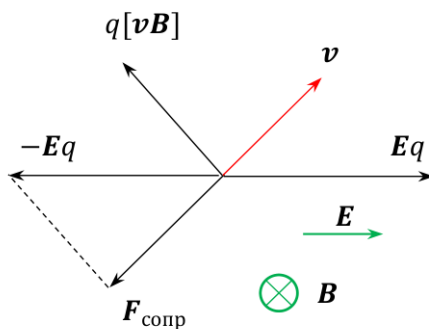
$$F = \sqrt{(Eq)^2 - (qvB)^2}.$$

Решение

Так как частица движется вдоль прямой с постоянной скоростью v , то

$$\vec{E}q + q[\vec{v}\vec{B}] + \vec{F}_{\text{сопр}} = 0.$$

Пусть заряд q — положительный. Сила Лоренца $q[\vec{v}\vec{B}]$ перпендикулярна индукции магнитного поля и скорости частицы, сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{сопр}}$ направлена против скорости частицы, сила $\vec{E}q$ направлена вдоль напряжённости электрического поля (см. рисунок).

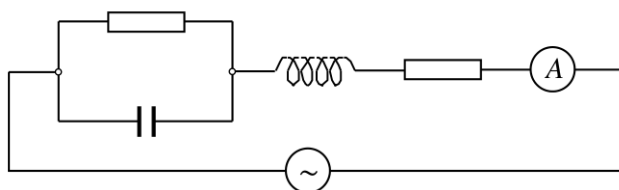


Используя теорему Пифагора, получаем

$$F = \sqrt{(Eq)^2 - (qvB)^2}.$$

14 Цепь переменного тока с амперметром

Электрическая цепь, состоящая из двух резисторов, конденсатора и катушки индуктивности, подключена к источнику переменного синусоидального напряжения, которое изменяется с частотой 50 Гц. Показание идеального амперметра переменного тока равно 1 А. Найдите среднюю по времени мощность, выделяемую в цепи, если сопротивление каждого резистора равно 100 Ом, а ёмкость конденсатора 10 мкФ.



Подсказка

Катушка и идеальный источник мощность не потребляют: тепло выделяется только в резисторах. Токи в резисторе и конденсаторе, соединённых параллельно, сдвинуты по фазе на 90° — сложите их на векторной диаграмме.

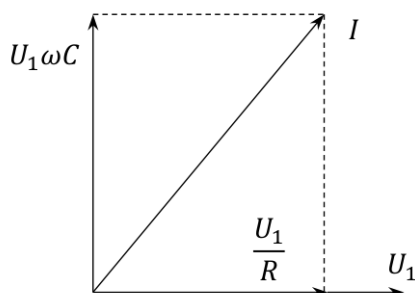
Ответ

$P \approx 191$ Вт.

Решение

Пусть U_1 — напряжение на параллельно соединённых конденсаторе и резисторе. Векторная диаграмма токов для этих двух элементов цепи изображена на рисунке, где I — суммарный ток в цепи. Из теоремы Пифагора следует:

$$I^2 = \left(\frac{U_1}{R}\right)^2 + (U_1\omega C)^2 \implies U_1 = \frac{IR}{\sqrt{1 + (R\omega C)^2}}.$$



Средняя тепловая мощность, выделяющаяся в цепи, равна:

$$P = I^2 R + \frac{U_1^2}{R} = I^2 R + \frac{I^2 R}{1 + (R\omega C)^2} = I^2 R \left(1 + \frac{1}{1 + (2\pi\nu RC)^2} \right) = 191 \text{ Вт.}$$

15 Электрон с меняющимся ускорением

Электрон движется прямолинейно в области с электрическим полем в течение времени τ . Половину этого времени он движется с постоянным ускорением, а оставшееся время движется с таким же по модулю, но противоположным по знаку ускорением. Определите, какой минимальный путь может пройти электрон за всё время движения, если вначале он имел скорость v .

Подсказка

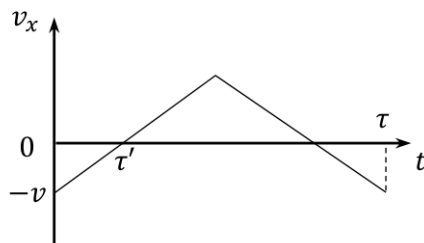
Путь минимален, когда начальное ускорение направлено против начальной скорости. Введите время τ' до первой остановки и выразите через него весь путь по графику скорости.

Ответ

$$S_{\min} = (\sqrt{2} - 1) v \tau.$$

Решение

Очевидно, что путь электрона будет минимален, если векторы начальной скорости и начального ускорения направлены в противоположные стороны. Пусть τ' — время, прошедшее с момента начала торможения до момента первой остановки электрона. На графике представлен характер движения электрона (см. рисунок).



Пройденный путь равен

$$S = v\tau' + \frac{v}{\tau'} \left(\frac{\tau}{2} - \tau' \right)^2 = v \left(\tau' + \frac{\left(\frac{\tau}{2} - \tau' \right)^2}{\tau'} \right) \Rightarrow \tau'^2 - \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{S}{v} \right) \tau' + \frac{\tau^2}{8} = 0.$$

Дискриминант этого квадратного уравнения должен быть неотрицательным, т.е.

$$\frac{1}{4} \left(\tau + \frac{S}{v} \right)^2 - \frac{1}{2} \tau^2 = \left(\frac{\tau}{2} + \frac{S}{2v} - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\tau}{2} + \frac{S}{2v} + \frac{\tau}{\sqrt{2}} \right) \geq 0 \implies \frac{\tau}{2} + \frac{S}{2v} - \frac{\tau}{\sqrt{2}} \geq 0.$$

Значит, минимальный путь равен

$$S_{\min} = (\sqrt{2} - 1) v \tau.$$

16 Отношение теплоёмкостей из двух нагревов

Экспериментально определить отношение теплоёмкостей газа при постоянном давлении и постоянном объёме $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ можно следующим методом. Определённое количество молей газа ν , начальные значения объёма и давления которого равны V и p , нагревают дважды с помощью спирали, по которой пропускают один и тот же ток в течение одинакового времени: сначала — при постоянном объёме, причём конечное давление составляет p_1 , затем — при постоянном давлении, причём конечный объём составляет V_2 . Найдите по этим данным γ , считая газ идеальным. Теплоёмкостью спирали и стенок сосуда можно пренебречь.

Подсказка

По закону Джоуля-Ленца в обоих нагревах газу передано одно и то же количество теплоты. Выразите через него изменения температуры из уравнения состояния.

Ответ

$$\gamma = \frac{V(p_1 - p)}{p_1(V_2 - V)}.$$

Решение

В обоих случаях в соответствии с законом Джоуля-Ленца газу передано одинаковое количество теплоты $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = \Delta Q$.

При изохорическом нагревании:

$$\Delta Q = \nu c_V \Delta T_1 = \nu c_V \frac{V(p_1 - p)}{\nu R} = c_V \frac{V(p_1 - p)}{R}.$$

При изобарическом нагревании:

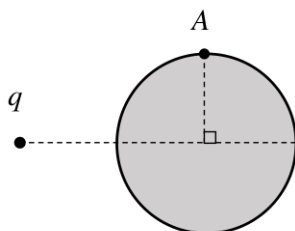
$$\Delta Q = \nu c_p \Delta T_2 = \nu c_p \frac{p_1(V_2 - V)}{\nu R} = c_p \frac{p_1(V_2 - V)}{R}.$$

Окончательно получаем:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{V(p_1 - p)}{p_1(V_2 - V)}.$$

17 Заряд у проводящего шара

Вблизи незаряженного проводящего шара радиусом R расположен точечный заряд q на расстоянии $2R$ от центра шара, как показано на рисунке. На какую величину $\Delta\varphi_A$ изменится потенциал точки (пространства) A , если шар удалить на бесконечность?



Подсказка

Точка A лежит на поверхности проводника, поэтому её потенциал равен потенциалу центра шара. Какой вклад в потенциал центра дают индуцированные заряды, сидящие на сфере?

Ответ

$$\Delta\varphi_A = k \frac{q}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right).$$

Решение

Потенциал точки A равен потенциалу центра шара, так как он проводящий. По принципу суперпозиции:

$$\varphi_{A1} = \varphi_q + \varphi_{\text{инд}},$$

где φ_q — потенциал в центре шара, созданный точечным зарядом q , $\varphi_{\text{инд}}$ — потенциал в центре шара, созданный зарядом, который индуцируется на поверхности шара. Разобьём поверхность шара на много маленьких кусочков и посчитаем $\varphi_{\text{инд}}$ с помощью принципа суперпозиции:

$$\varphi_{\text{инд}} = \sum_i k \frac{q_i}{R} = \frac{k}{R} \sum_i q_i = 0.$$

Следовательно,

$$\varphi_{A1} = \varphi_q = k \frac{q}{2R}.$$

Потенциал точки A после удаления шара равен

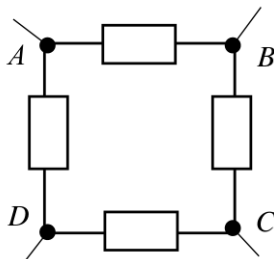
$$\varphi_{A2} = k \frac{q}{\sqrt{5}R}.$$

Окончательно получаем:

$$\Delta\varphi_A = \varphi_{A2} - \varphi_{A1} = k \frac{q}{R} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right).$$

18 Мощность в цепи из четырёх узлов

При подключении источника постоянного напряжения к точкам A и B или C и D цепи, указанной на рисунке, выделяется одна и та же мощность P . При подключении того же источника к парам точек B и C или A и D в цепи выделяется мощность $2P$. Найдите мощность, выделяемую в цепи, при подключении источника к паре точек B и D .



Подсказка

Из условия следует, что сопротивления резисторов в противоположных сторонах квадрата попарно равны. Запишите мощности для двух подключений через R_1 , R_2 и напряжение источника.

Ответ

$$P' = P \frac{4\sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})^2}.$$

Решение

Из условия задачи следует, что сопротивления резисторов, включённых в противоположные стороны квадрата, попарно равны. Пусть R_1 — сопротивление резисторов между точками AB и CD , R_2 — между точками BC и AD , U — напряжение сети, тогда

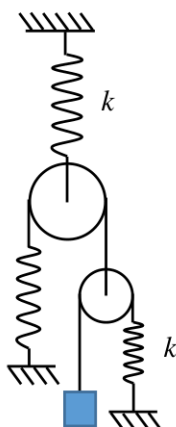
$$P = U^2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1 + 2R_2} \right), \quad 2P = U^2 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_2 + 2R_1} \right) \Rightarrow \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}.$$

Искомая мощность равна

$$P' = \frac{2U^2}{R_1 + R_2} = P \frac{4\sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3})^2}.$$

19 Колебания груза на системе блоков

Найдите собственную частоту ω_0 и максимально возможную амплитуду $A_{\max}$ гармонических колебаний системы, изображённой на рисунке. Масса груза равна m . Блоки, пружины и нити невесомы, нити нерастяжимы, трения в осях блоков нет. Длины всех вертикальных участков нитей настолько велики, что не их длинами определяется максимальная амплитуда гармонических колебаний.



Подсказка

Выразите деформации всех трёх пружин через натяжение нити, на которой висит груз, и найдите смещение груза как сумму этих деформаций. Отсюда — эквивалентная жёсткость. Максимальная амплитуда ограничена тем, что нити должны оставаться натянутыми.

Ответ

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{19m}}; A_{\max} = \frac{19mg}{k}.$$

Решение

Пусть натяжение нижней нити равно T , тогда натяжение верхней равно $2T$, а сила упругости верхней пружины равна $4T$. Тогда деформация верхней пружины равна $\frac{4T}{k}$, деформация левой пружины $\frac{2T}{2k} = \frac{T}{k}$. Значит, нижний блок опустится на $\left(\frac{4T}{k} + \frac{4T}{k} + \frac{T}{k}\right) = \frac{9T}{k}$. Деформация правой пружины равна $\frac{T}{k}$. Положение равновесия груза расположено ниже положения, при котором все пружины недеформированы, на $\left(\frac{9T}{k} + \frac{9T}{k} + \frac{T}{k}\right) = \frac{19T}{k}$. Следовательно,

$$A_{\max} = \frac{19T}{k} = \frac{19mg}{k}.$$

Собственная частота гармонических колебаний системы равна

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\text{ЭКВ}}}{m}} = \sqrt{\frac{k}{19m}}.$$

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2017/18, отборочный этап, 11 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.