

МОШ, 2017/18, отборочный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Единицы объёма в Древнем Риме

В древнем Риме было несколько единиц измерения объёма, такие как секстарий, киафа, урна и амфора. Известно, что 12 киафов составляют 1 секстарий, одна урна равна половине амфоры, а в 1 урне 288 киафов. Определите, что больше по объёму: 3 амфоры или 150 секстариев?

Подсказка

Выразите обе величины через одну и ту же единицу, например через секстарии.

Ответ

150 секстариев больше, чем 3 амфоры (3 амфоры = 144 секстария).

Решение

Пусть К, С, У и А – обозначения единиц измерения объёма. Так как $1У = \frac{1}{2}А$, следовательно, $288К = \frac{1}{2}А$. Поскольку 12К составляют 1С, то $288К = 24С$, отсюда получаем $\frac{1}{2}А = 24С$. Следовательно, $3А = 144С$. Значит, 150 секстариев больше по объёму, чем три амфоры.

2 Айболит и две дороги

Подвернув ногу, снежный барс вызвал доктора Айболита домой, куда вело две дороги: короткая – длиной 27 км и длинная – 52 км. Айболит поехал по короткой дороге, и навигатор рассчитал, что доктор приедет в 13.30. Однако, проехав 10 км, Айболит обнаружил, что дорогу замело снегом. Айболит сразу поехал обратно и, вернувшись, поехал по длинной дороге. К барсу он прибыл в 14.00. Найдите скорость Айболита, считая, что она была постоянной.

Подсказка

Сколько всего километров проехал Айболит? На сколько позже запланированного он приехал?

Ответ

$v = 90$ км/ч.

Решение

Из условия следует, что Айболит в результате проехал $52 \text{ км} + 2 \times 10 \text{ км} = 72 \text{ км}$. При этом он опоздал на 30 мин. Составим уравнение:

$$\frac{72}{v} - \frac{27}{v} = 0,5 \text{ ч},$$

где v – постоянная скорость Айболита. Решая уравнение, получаем скорость доктора

$$v = \frac{72 \text{ км} - 27 \text{ км}}{0,5 \text{ ч}} = 90 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

3 Карл и Клара

Карл украл из сумочки Клары кораллы и побежал со скоростью 4 м/с. Клара заметила пропажу в тот момент, когда Карл находился на расстоянии 30 м, и побежала вдогонку за ним со скоростью 5 м/с. Какое расстояние должна пробежать Клара, чтобы, опередив Карла на 10 м, показать ему его драгоценный кларнет?

Подсказка

Перейдите в систему отсчёта Карла: с какой скоростью и на какое расстояние Кларе нужно сократить отставание?

Ответ

$S = 200$ м.

Решение

Скорость Клары относительно Карла равна $v_{\text{отн}} = 5 \text{ м/с} - 4 \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}$. Следовательно, Клара обгонит Карла на 10 м через

$$t = \frac{30 \text{ м} + 10 \text{ м}}{1 \text{ м/с}} = 40 \text{ с}.$$

Отсюда расстояние, которое необходимо пробежать Кларе, равно $S = v \times t = 5 \text{ м/с} \times 40 \text{ с} = 200 \text{ м}$.

4 Дюймовая линейка и шуруп

С помощью рисунка определите в сантиметрах цену маленького деления линейки. Какой ширины в см должна быть стена, чтобы с обратной стороны не торчал шуруп? 1 дюйм равен 2,54 см.



Подсказка

Сколько маленьких делений укладывается в одном дюйме? Сколько таких делений занимает сам шуруп без головки и шайбы?

Ответ

Цена деления 0,3175 см; толщина стены $d \geq 5,40$ см.

Решение

Из рисунка следует, что цена деления линейки $\frac{1}{8}$ дюйма = 0,125 дюйма = 0,3175 см. Следовательно, толщина d стены должна быть не меньше длины шурупа (без учёта головки и шайбы):

$$d \geq 17 \times 0,3175 = 5,40 \text{ см.}$$

Толщина стены может быть и больше.

5 Велосипедисты меняются скоростями

Из деревень Абаканово и Юдино, находящихся на расстоянии 3 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста. Первый движется со скоростью 13 м/с, а второй – со скоростью 7 м/с. С момента, когда они встретились, первый поехал со скоростью 7 м/с, а второй – со скоростью 13 м/с (в тех же направлениях). Какое время, считая от момента встречи, понадобится первому велосипедисту, чтобы приехать в Юдино, а второму – в Абаканово?

Подсказка

До встречи велосипедисты сближаются с суммой скоростей. Сравните, какой путь каждому остаётся после встречи.

Ответ

Одинаковое для обоих время: $t = 150$ с.

Решение

Время движения велосипедистов до их встречи равно $t_1 = \frac{s}{v_1 + v_2} = 150$ с. Велосипедисты достигнут пунктов назначения одновременно через время $t_2 = \frac{2s}{v_1 + v_2} = 300$ с. Значит, считая от момента встречи, первому и второму велосипедистам понадобится одинаковое время $t = t_2 - t_1 = 150$ с.

6 Автомобиль и снегопад

Водитель автомобиля рассчитывал приехать вовремя, двигаясь с постоянной скоростью 70 км/ч, и на первом участке пути поддерживал эту скорость до тех пор, пока не пошёл сильный снег. Из-за этого скорость автомобиля снизилась до 50 км/ч. Когда снег перестал идти, автомобиль снова поехал со скоростью 70 км/ч. Чтобы прибыть в конечный пункт точно в запланированное время, водителю пришлось последние 40 км пути ехать со скоростью 80 км/ч. Сколько времени шёл снег? Чему равна средняя скорость автомобиля? Считайте, что автомобиль в пути не останавливался.

Подсказка

Раз водитель приехал вовремя, чему равна его средняя скорость на всём пути? Участки со скоростью 70 км/ч не влияют на среднюю.

Ответ

Снег шёл $t_2 = 15$ мин; средняя скорость $v_{\text{ср}} = 70$ км/ч.

Решение

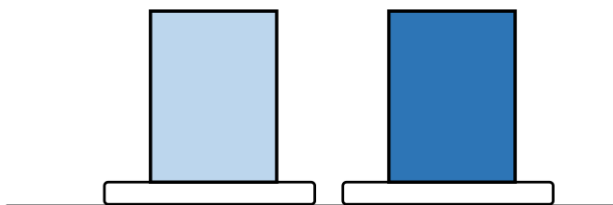
Так как автомобиль приехал вовремя, то средняя скорость равна первоначальной: $v_{\text{ср}} = 70$ км/ч. Средняя скорость равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + s_4}{t_1 + t_2 + t_3 + t_4} \implies v_{\text{ср}}t_2 + v_{\text{ср}}t_4 = v_2t_2 + s_4 \implies t_2 = 15 \text{ мин}$$

(в последнем преобразовании учтено, что $v_{\text{ср}}t_1 = v_1t_1 = s_1$ и $v_{\text{ср}}t_3 = v_3t_3 = s_3$).

7 Откачка жидкостей из стаканов на весах

Два одинаковых цилиндрических стакана, заполненных до краёв различными жидкостями, стоят на электронных весах, как показано на рисунке. Показание левых весов на 0,5 кг больше показания правых. Два насоса одновременно начинают откачивать из стаканов жидкости таким образом, что уровень жидкости в левом стакане понижается вдвое быстрее, чем в правом. Максимальная величина разности показаний весов в процессе откачивания жидкостей снова составила 0,5 кг. Чему равно отношение плотностей налитых в сосуды жидкостей?



Подсказка

Выразите разность показаний весов через уровни жидкостей и найдите, когда она максимальна: в какой момент опустеет один из стаканов?

Ответ

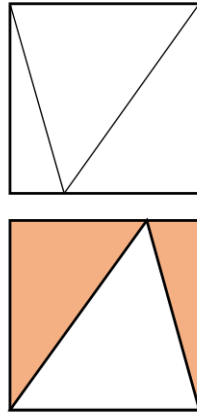
Отношение плотностей $3/2$.

Решение

Когда более плотную жидкость полностью откачают, а менее плотная жидкость заполнит ровно половину сосуда, в этот момент между показаниями весов максимальная разность. Так как сосуды одинаковы, следовательно, масса менее плотной жидкости в этот момент равна 0,5 кг. Значит, в начальный момент масса менее плотной жидкости была равна 1 кг, а более плотной – 1,5 кг. Отношение плотностей жидкостей $3/2$.

8 Поверхностная плотность пластины

Для плоских однородных тел постоянной толщины удобной характеристикой является поверхностная плотность σ , измеряемая в кг/м² (масса единицы площади). Плоская квадратная пластина, сделанная из фанеры, имеет поверхностную плотность 2,3 кг/м². Из бумаги сначала вырезали такой же квадрат, а потом разрезали его на три части, как показано на рисунке (верхний). Затем среднюю часть приклеили к пластине (см. нижний рисунок). Определите среднюю поверхностную плотность получившейся пластины, если поверхностная плотность бумаги равна 200 г/м².



Подсказка

Какую долю площади квадрата занимает треугольник, у которого сторона квадрата служит основанием, а вершина лежит на противоположной стороне?

Ответ

$$\sigma = 2,4 \text{ кг/м}^2.$$

Решение

Из рисунка видно, что площадь наклеенной бумаги равна половине площади листа. Значит,

$$\sigma = \frac{m_{\text{фан}} + m_{\text{бум}}}{s} = \frac{\sigma_{\text{фан}} s + \sigma_{\text{бум}} s/2}{s} = 2,4 \text{ кг/м}^2.$$