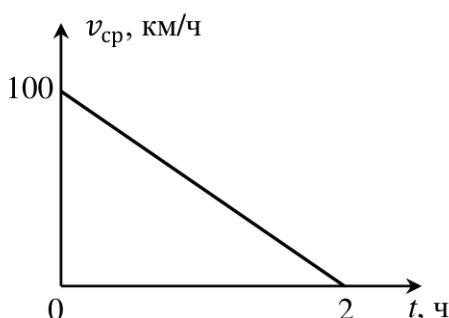


МОШ, 2017/18, отборочный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Средняя скорость как график

На графике приведена зависимость средней скорости $v_{\text{ср}}$ автомобиля за все время движения от времени t . Найдите, в какой момент времени значение скорости по модулю было минимально. Какой путь проехал автомобиль? Движение автомобиля прямолинейное.



Подсказка

Средняя скорость с начала движения равна $x(t)/t$. Выразите отсюда координату $x(t)$ и посмотрите, какой вид имеет её график и когда мгновенная скорость обращается в нуль.

Ответ

Минимальная по модулю скорость равна 0 (в момент $t = 1$ ч, когда автомобиль развернулся); путь за 2 ч равен 100 км.

Решение

Из графика следует, что

$$v_{\text{ср}} = 100 - 50t.$$

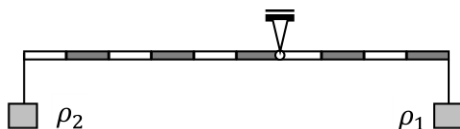
С другой стороны,

$$v_{\text{ср}} = \frac{x - x_0}{t} \implies x(t) = 100t - 50t^2 = 50t(2 - t),$$

где x — координата автомобиля в момент времени t , x_0 — начальная координата, которую мы приняли равной нулю. График функции $x(t)$ — парабола, и при $t = 1$ ч имеет максимум (это говорит о том, что автомобиль развернулся). Значит, минимальное значение скорости по модулю равно 0 км/ч. За первый час автомобиль проехал $x(1) = 100 - 50 = 50$ км. Следовательно, пройденный путь за 2 ч равен 100 км.

2 Тела на стержне в воде

Два тела покоятся на невесомом стержне, как показано на рисунке. После того, как тела полностью погрузили в воду, для сохранения равновесия стержня их пришлось поменять местами. Найти плотности тел ρ_1 и ρ_2 , если $\rho_2/\rho_1 = 2$. Плотность воды равна 1 г/см^3 .



Подсказка

Запишите правило моментов для стержня в воздухе, а затем для погружённых тел, заменив веса на веса за вычетом силы Архимеда (тела при этом стоят на других плечах).

Ответ

$$\rho_1 = 1,4 \text{ г/см}^3, \quad \rho_2 = 2,8 \text{ г/см}^3.$$

Решение

Запишем уравнение моментов относительно оси вращения стержня:

$$\rho_2 g V_2 \cdot 6a = \rho_1 g V_1 \cdot 4a \implies 3V_2 = V_1.$$

Запишем уравнение моментов для второго случая с учётом того, что на погруженные тела действует сила Архимеда:

$$g V_1 (\rho_1 - \rho_{\text{в}}) \cdot 6a = g V_2 (\rho_2 - \rho_{\text{в}}) \cdot 4a.$$

Решая систему уравнений, получаем $\rho_1 = \frac{7}{5} \rho_{\text{в}} = 1,4 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = \frac{14}{5} \rho_{\text{в}} = 2,8 \text{ г/см}^3$.

3 Лёд в калориметре с водой

В калориметр налили $m = 2 \text{ кг}$ воды, имеющей температуру $t_1 = 50 \text{ }^\circ\text{C}$, и добавили лёд при температуре $t_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$. Сколько могло быть добавлено льда, если после установления теплового равновесия температура содержимого калориметра оказалась равной $t = 0 \text{ }^\circ\text{C}$? $c_{\text{в}} = 4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, $c_{\text{л}} = 2,1 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, $\lambda = 330 \text{ кДж/кг}$. Теплоемкостью калориметра и потерями пренебречь.

Подсказка

Температура $0 \text{ }^\circ\text{C}$ устанавливается при смеси льда и воды. Найдите два крайних случая: когда весь лёд едва успел растаять и когда вся вода едва успела замёрзнуть.

Ответ

$$1,13 \text{ кг} \leq m_{\text{л}} \leq 25,71 \text{ кг}.$$

Решение

Рассмотрим вариант, когда весь лёд растаял. Запишем для этого случая уравнение теплового баланса:

$$Q_{\text{охл.воды}} + Q_{\text{плавл.льда}} + Q_{\text{нагр.льда}} = 0 \implies c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t - t_1) + \lambda m_{\text{л1}} + c_{\text{л}}m_{\text{л1}}(t - t_2) = 0.$$

Отсюда следует, что минимально возможная масса льда равна

$$m_{\text{л1}} = \frac{c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t_1 - t)}{\lambda + c_{\text{л}}(t - t_2)} = 1,13 \text{ кг.}$$

Рассмотрим теперь случай, когда вся вода замёрзла. Уравнение теплового баланса будет выглядеть следующим образом:

$$Q_{\text{охл.воды}} + Q_{\text{крист.воды}} + Q_{\text{нагр.льда}} = 0 \implies c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t - t_1) - \lambda m_{\text{в}} + c_{\text{л}}m_{\text{л2}}(t - t_2) = 0.$$

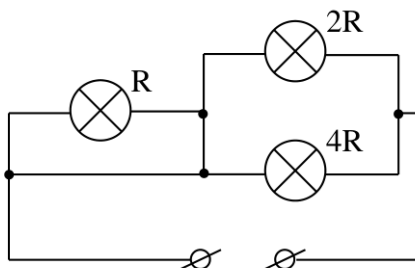
Значит, максимально возможная масса льда равна

$$m_{\text{л2}} = \frac{\lambda m_{\text{в}} - c_{\text{в}}m_{\text{в}}(t - t_1)}{c_{\text{л}}(t - t_2)} = 25,71 \text{ кг.}$$

Окончательно получаем, что $1,13 \text{ кг} \leq m_{\text{л}} \leq 25,71 \text{ кг}$.

4 Какая лампа ярче

Какая из ламп будет потреблять бóльшую мощность (гореть ярче)? Решение задачи должно содержать достаточно подробное объяснение полученного ответа.



Подсказка

Посмотрите, не соединены ли выводы какой-нибудь лампы накоротко проводом. Мощность на лампе при известном напряжении: $P = U^2/R$.

Ответ

Больше всех потребляет лампа сопротивлением $2R$.

Решение

Из рисунка видно, что лампочка сопротивлением R «закорочена», значит, в результате получается схема, состоящая из двух лампочек, соединённых параллельно. Из формулы $P = \frac{U^2}{R}$ с учётом того, что напряжения на лампочках равны между собой, следует, что бóльшую мощность будет потреблять лампочка сопротивлением $2R$.

5 Камень со скалы под углом

Со скалы, возвышающейся над морем на высоту $h = 25$ м, бросили камень. Найдите время его полёта, если известно, что непосредственно перед падением в воду камень имел скорость $v = 30$ м/с, направленную под углом $\beta = 120^\circ$ к начальной скорости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Подсказка

Начальную скорость найдите из энергии. Затем нарисуйте треугольник скоростей $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$: в нём известны две стороны и угол между ними.

Ответ

$t \approx 4,4$ с.

Решение

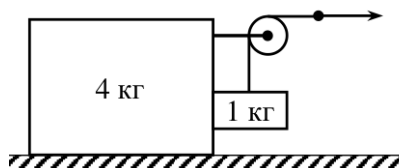
Запишем закон сохранения энергии (или формулу $h = \frac{v^2 - v_0^2}{2g}$):

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} \implies v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh}.$$

Теперь в треугольнике скоростей $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ известны две стороны и угол между ними β . Воспользовавшись теоремой косинусов, окончательно получаем: $t = 4,4$ с.

6 Тела на блоке на гладком столе

На гладком горизонтальном столе находится механическая система, изображённая на рисунке. Массы тел 4 кг и 1 кг. Свободный конец нити тянут в горизонтальном направлении с ускорением 14 м/с² (см. рисунок). Найдите силу натяжения нити. Блок невесом, нить невесома и нерастяжима, трения в оси блока нет, ускорение свободного падения равно 10 м/с².



Подсказка

Нить действует на малое тело вертикально вверх, а на большое — горизонтально, с одной и той же силой. Составьте условие нерастяжимости нити через ускорения тел и конца нити.

Ответ

$F = 20$ Н.

Решение

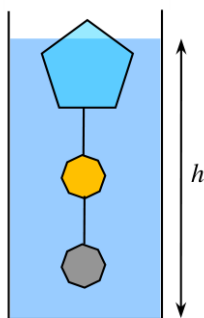
Пусть m — масса маленького тела, M — масса большого тела. Вдоль стола тела движутся с ускорением $A = \frac{F}{m+M}$. Вертикальная составляющая ускорения тела массой m равна: $a_y = \frac{F}{m} - g$. Запишем уравнение кинематической связи для ускорений тел:

$$a_0 - A - a_y = 0 \implies F = \frac{a_0 + g}{\frac{1}{m+M} + \frac{1}{m}} = 20 \text{ Н},$$

где a_0 — ускорение, с которым тянут свободный конец нити.

7 Льдинка с двумя игрушками

В цилиндрическом сосуде с водой плавает льдинка с привязанными к ней двумя детскими игрушками (см. рис.). Силы натяжения всех нитей одинаковы и равны T . Определите, в какую сторону и на сколько изменится уровень воды в стакане после того, как лёд растает. Площадь дна сосуда S , плотность воды ρ .



Подсказка

Что говорит равенство натяжений верхней и нижней нитей о верхней игрушке? Сравните силы давления на дно сосуда до и после таяния льда: что изменилось?

Ответ

Уровень воды понизится на $\Delta h = \frac{T}{\rho g S}$.

Решение

Из равенства натяжения нитей следует, что плотность верхней игрушки равна плотности воды. Рассмотрим силы давления на дно сосуда до и после того, как лёд растаял.

1. До: $\rho g h_1 S = (m + M)g + m_{\text{л}}g$, где m — суммарная масса игрушек, M — масса воды.
2. После: $\rho g h_2 S + F_{\text{д}} = (m + M)g + m_{\text{л}}g$, $F_{\text{д}}$ — сила давления нижнего камня на дно.

Правые части уравнений между собой равны, а сила давления равна силе натяжения T , отсюда получаем, что уровень воды понизится на величину $\Delta h = \frac{T}{\rho g S}$.

8 Тело в полном сосуде с водой

В сосуд, наполненный до краёв водой с температурой $t_0 = 19^\circ\text{C}$, аккуратно опустили некоторое тело, плотность которого в два раза больше плотности воды, а удельная теплоёмкость в два раза меньше удельной теплоёмкости воды. После установления теплового равновесия вода и тело в сосуде приобрели температуру $t_1 = 26^\circ\text{C}$. До какого значения t_2 повысилась бы температура воды в сосуде, если в этот же сосуд сразу были опущены два таких тела, а не одно? Считать, что тела полностью погружаются в воду. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

Подсказка

Сосуд полон, поэтому погружённое тело вытесняет воду, и масса воды в сосуде уменьшается. Запишите баланс для одного и для двух тел и исключите неизвестную начальную температуру тела.

Ответ

$$t_2 = 2t_1 - t_0 = 33^\circ\text{C}.$$

Решение

Запишем уравнение теплового баланса для двух случаев (с учётом соотношений плотностей и теплоёмкостей тела и воды):

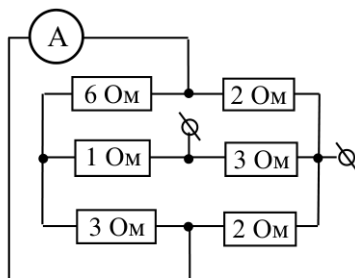
$$c(m - \rho V)(t_1 - t_0) = \frac{c}{2} \cdot 2\rho V(t_T - t_1) \implies cmt_1 = cmt_0 + c\rho V(t_T - t_0),$$

$$c(m - 2\rho V)(t_2 - t_0) = \frac{c}{2} \cdot 4\rho V(t_T - t_2) \implies cmt_2 = cmt_0 + 2c\rho V(t_T - t_0),$$

где t_T — начальная температура тела. Решая систему уравнений, окончательно получаем: $t_2 = 2t_1 - t_0 = 33^\circ\text{C}$.

9 Амперметр в схеме из резисторов

Что покажет идеальный амперметр, если к выводам схемы, изображённой на рисунке, подключить батарейку 12 В?



Подсказка

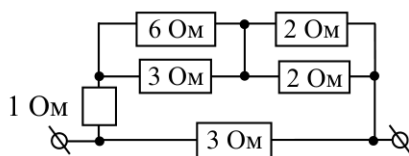
Идеальный амперметр — просто провод: объедините соединённые им узлы и перерисуйте схему. Затем найдите токи через резисторы и примените закон сохранения заряда в узле с амперметром.

Ответ

Амперметр покажет 0,5 А.

Решение

На эквивалентной схеме видно, что резистор сопротивлением 3 Ом присоединён параллельно ко всему остальному участку.



Суммарный ток, который протекает через эту ветвь, равен 3 А. Через сопротивление 6 Ом протекает ток 1 А, а через сопротивление 2 Ом протекает ток 1,5 А. Из закона сохранения заряда следует, что амперметр покажет 0,5 А.