

МОШ, 2017/18, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Таракан на глобусе

По поверхности стоящего неподвижно небольшого школьного глобуса радиусом $R = 9$ см бежит маленький таракан с постоянной по модулю скоростью $V = 3$ см/с. По отношению к разметке глобуса его скорость все время направлена на северо-восток. Каково по модулю ускорение таракана в тот момент, когда он наступает на кружочек, соответствующий положению Санкт-Петербурга ($\varphi = 60^\circ$ северной широты)? Глобус не вращается.

Подсказка

Ускорение имеет две составляющие: к центру глобуса и вдоль поверхности, перпендикулярно скорости. Вторая связана с поворотом касательной к траектории при движении по глобусу.

Ответ

$$a = \frac{V^2}{R} \sqrt{\frac{5}{2}} \approx 1,58 \text{ см/с}^2.$$

2 Верёвка на вращающемся шкиве

Через шершавый цилиндрический шкив радиусом R с горизонтальной осью вращения была перекинута длинная невесомая и нерастяжимая верёвка, к концам которой прикреплены грузы массами m и $5m$. Шкив, приводимый в движение электромотором, равномерно вращался с угловой скоростью ω , и грузы висели на одном уровне, не смещаясь по вертикали. В момент времени $t = 0$ направление вращения шкива быстро изменилось на противоположное.

1. Какую мощность развивал электромотор до смены направления вращения шкива?
2. С какими по модулю ускорениями сразу после смены направления вращения двигались грузы?
3. Как модули ускорений грузов зависели от времени после смены направления вращения шкива?

Примечание: отношение модулей сил натяжения лёгкой верёвки по разные стороны от шкива зависит только от коэффициента трения между шкивом и верёвкой.

Подсказка

Пока грузы неподвижны, а шкив скользит под верёвкой, отношение натяжений определено массами грузов. После смены направления оно станет обратным, пока верёвка скользит по шкиву.

Ответ

$$1) N = 4mgR\omega; \quad 2) a = \frac{12}{13}g; \quad 3) a = \frac{12}{13}g \text{ при } 0 < t < \frac{13\omega R}{12g} \text{ и } a = 0 \text{ при } t \geq \frac{13\omega R}{12g}.$$

3 Газ в сосуде с трением поршня

В цилиндрическом сосуде с площадью основания S находится ν молей идеального одноатомного газа, отделенного от окружающей среды невесомым поршнем. Коэффициент трения между поршнем и стенками сосуда равен μ . В начальном состоянии газ имеет объем V_0 , температуру T_0 и давление, равное давлению окружающей среды. При медленном нагревании газа поршень начинает смещаться, когда температура газа возрастает до значения $1,2T_0$. После достижения температуры $2T_0$ нагрев прекращают, и газ остывает до исходной температуры T_0 . Найдите

1. конечный объем газа;
2. количество теплоты, которое было подведено к газу в процессе его нагревания;
3. модуль силы реакции, действующей со стороны стенок сосуда на поршень.

Подсказка

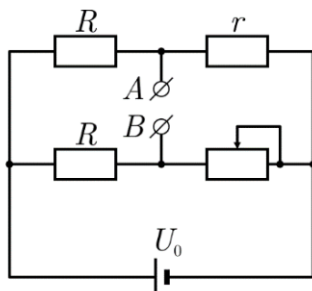
Нарисуйте процесс на диаграмме p – V : нагрев при постоянном объеме до начала скольжения, затем изобара, затем охлаждение при постоянном объеме до момента, когда поршень снова тронется (в обратную сторону).

Ответ

$$1) V_5 = \frac{5}{4}V_0; \quad 2) \Delta Q = 2,3\nu RT_0; \quad 3) N = \frac{0,2 p_0 S}{\mu} = \frac{0,2 \nu RT_0 S}{V_0 \mu}.$$

4 Эквивалентный источник между А и В

В электрической цепи, схема которой изображена на рисунке, сопротивления постоянных резисторов не известны, а сопротивление переменного резистора может изменяться в широком диапазоне — от нуля до значений, значительно превосходящих сопротивления других резисторов. Батарейка идеальная. Между контактами A и B сначала подключают идеальный вольтметр, который не только измеряет напряжение (напряжение холостого хода), но и показывает его полярность. Затем вольтметр отключают и подключают вместо него идеальный амперметр, измеряющий силу тока (ток короткого замыкания) и показывающий его направление. Такие же измерения проводят при разных значениях сопротивления переменного резистора — от очень маленьких до очень больших. В результате измерений обнаружилось, что значения напряжений холостого хода лежат в интервале от -2 В до $+4$ В, а значения тока короткого замыкания от -30 мА до $+15$ мА. При этом отрицательным токам соответствуют отрицательные напряжения, а положительным — положительные. Определите по этим данным сопротивления r и R резисторов и напряжение U_0 батарейки.



Подсказка

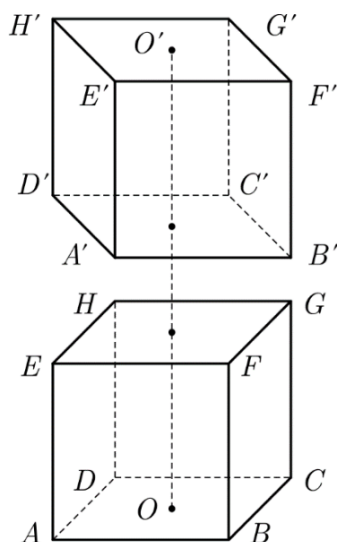
Выразите показания вольтметра и амперметра через U_0 , R , r для двух крайних значений сопротивления переменного резистора (нуль и бесконечность) и сопоставьте с границами измеренных интервалов.

Ответ

$R = 200 \text{ Ом}$, $r = 100 \text{ Ом}$, $U_0 = 6 \text{ В}$.

5 Заряженные кубики под углом

Два одинаковых проводящих кубика с общей осью OO' расположены таким образом, что рёбра AD и $A'D'$ составляют угол $\pi/4$ друг с другом (см. рисунок). Нижнему и верхнему кубикам сообщены заряды $+3q$ и $-q$ соответственно, при этом разность потенциалов кубиков равна $\Delta\varphi$. Кубики соединяют тонким проводником.



1. Какой заряд и в каком направлении протечет по этому проводнику?
2. Какое количество теплоты при этом выделится?
3. Чему будет равна разность потенциалов кубиков, если их зарядить, сообщив им заряды $+q$ и $-q$?

Подсказка

Два проводника образуют конденсатор: разность потенциалов пропорциональна заряду q' , перетекающему с одного на другой. Работа при перетекании равна площади под графиком зависимости разности потенциалов от этого заряда.

Ответ

- 1) заряд $+2q$ протечёт с нижнего кубика на верхний; 2) $Q = q \Delta\varphi$; 3) $\Delta\varphi_1 = \frac{\Delta\varphi}{2}$.

6 Смазанный пропеллер

На фотографии, сделанной камерой мобильного телефона, представлен вращающийся пропеллер самолета. Наблюдаемый эффект «смазывания» изображения обусловлен способом обработки светового потока матрицей фотокамеры. Во время срабатывания фотокамеры матрица «захватывает» не всю снимаемую сцену целиком одновременно, а происходит очень быстрое поэтапное сканирование кадра в направлении слева направо (с точки зрения фотографа). В результате в память фотокамеры последовательно попадают узкие вертикальные «полоски» изображения, причем «линия сканирования» движется с постоянной скоростью.



1. В каком направлении вращается пропеллер с точки зрения фотографа?
2. Сколько лопастей у пропеллера?
3. Оцените, сколько оборотов в секунду делает пропеллер, если процесс получения всего изображения занял $1/8$ секунды?

Подсказка

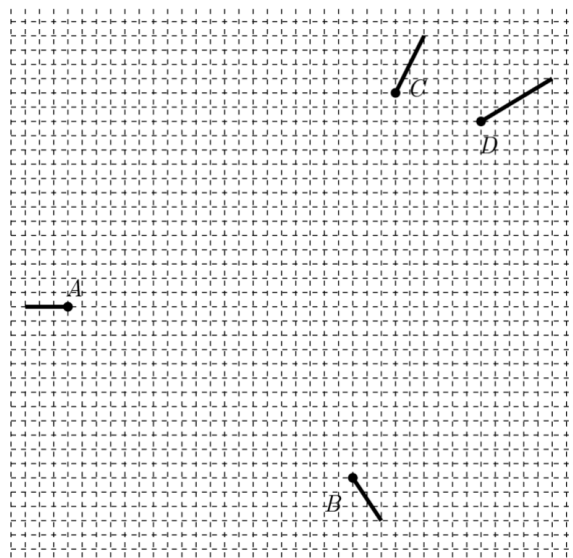
Каждая вертикальная полоска снята в свой момент времени: форма «смазанной» лопасти показывает, где она находилась в разные моменты. Сравните изгиб лопасти с положением одной и той же лопасти по мере сканирования слева направо.

Ответ

- 1) против часовой стрелки; 2) три лопасти; 3) примерно (15 ± 1) оборотов в секунду.

7 Распад частицы на три, затем на две

Регистрирующая аппаратура установила положения элементарных частиц A , B , C и D в некоторый момент, а также их перемещения за время τ , считая с этого момента (перемещения показаны на рисунке отрезками). Массы частиц C и D одинаковы. Была высказана догадка, что эти частицы появились при распаде одной единственной частицы, и что она сначала распалась на три частицы, а затем одна из трёх образовавшихся частиц распалась на две частицы. Установите, верна ли эта гипотеза, и если да, то определите, через какое время после первого распада произошёл второй распад? Считайте, что частицы движутся свободно.



Подсказка

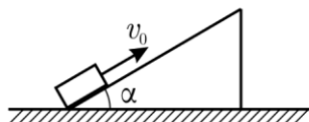
Продлите назад отрезки перемещений: скорости известны с точностью до общего множителя $1/\tau$, значит, места распадов лежат на пересечении линий движения. При распаде на две равные массы C и D импульс сохраняется.

Ответ

Гипотеза верна; второй распад произошёл позже первого на время 2τ .

8 Брусок на клине с трением

Клин массой $M = 250$ г с углом $\alpha = 30^\circ$ при основании покоится на гладкой горизонтальной плоскости. На клин положили брусок массой $m = 100$ г и ударом сообщили ему некоторую скорость, направленную вверх вдоль наклонной поверхности клина. Найдите, какое количество теплоты Q выделилось в результате трения бруска о клин, если известно, что максимальная высота, на которую поднялся брусок от своего начального положения, $h = 20$ см. Коэффициент трения бруска о наклонную поверхность клина $\mu = 0,6$. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с².



Подсказка

Выделившееся тепло равно работе силы трения на пути вдоль клина. Силу реакции N найдите из уравнений движения бруска и клина при ускорении клина, возникающем из-за сил, действующих со стороны бруска.

Ответ

$$Q = \frac{\mu m g h \operatorname{ctg} \alpha}{1 + \frac{m}{M} \sin \alpha (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)} \approx 0,17 \text{ Дж.}$$

9 Поток тёплого воздуха над площадкой

На горизонтальном участке поля Вася очистил от чистого белого снега площадку с размерами $1 \text{ м} \times 1 \text{ м}$. Под лучами весеннего солнца черная земля прогревается и нагревает расположенный над ней воздух. Тепловая мощность, получаемая воздухом от площадки, равна $W = 0,3 \text{ кВт}$ — поскольку солнце зимой находится довольно низко над горизонтом. В безветренную и сухую погоду при температуре воздуха $T_0 = 273 \text{ К}$ и давлении возле поверхности земли $p = 10^5 \text{ Па}$ столб теплого воздуха, поднимающийся над площадкой, имеет на высоте $h = 10 \text{ м}$ температуру $T_1 = 275 \text{ К}$ и поперечное сечение, равное $S = 2 \text{ м}^2$. Температура окружающего воздуха не зависит от высоты и равна T_0 . Молярная масса воздуха $\mu = 29 \text{ г/моль}$, его молярная теплоемкость при постоянном давлении равна $c_p = 7R/2$.

1. Оцените, с какой скоростью поднимается поток воздуха на высоте h , если процесс уже установился?
2. Оцените, на какую высоту поднялся бы теплый воздух, если бы отсутствовал теплообмен между теплым воздухом и окружающим его холодным воздухом?

Примечание. Справедлива приближенная формула: $\Delta\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{b \Delta a - a \Delta b}{b^2}$.

Подсказка

В установившемся режиме вся мощность W уходит на нагрев протекающего через сечение воздуха от T_0 до T_1 . Во втором пункте воздух расширяется адиабатически, а давление в нём равно давлению окружающего воздуха на той же высоте.

Ответ

$$1) u = \frac{2T_1 W}{7Sp(T_1 - T_0)} \approx 0,06 \text{ м/с}; \quad 2) h \approx \frac{7R \Delta T}{2\mu g} \approx 200 \text{ м}.$$

10 Светодиодная гирлянда

Светодиодная гирлянда состоит из n параллельно подключённых ветвей, в каждую из которых входит m последовательно соединённых светодиодов (см. схему на рисунке 1). При подключении такой гирлянды к источнику постоянного напряжения часто используют стабилизатор силы тока (изображён на схеме кружком со стрелкой, помещённым внутрь прямоугольника). Вольтамперная характеристика стабилизатора представлена на рисунке 2. Вольтамперная характеристика одного светодиода показана на рисунке 3. Рабочий участок характеристики светодиода располагается между точками A и B : при меньших силах тока излучение светодиода незаметно для глаз, а при больших — светодиод может сгореть.

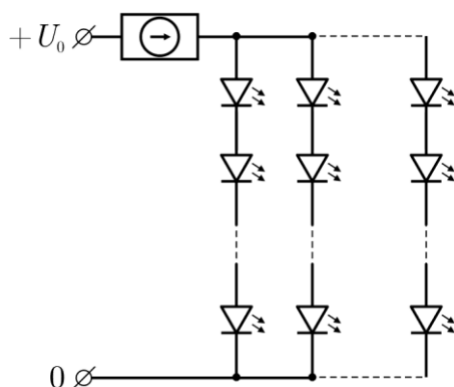


Рис. 1.

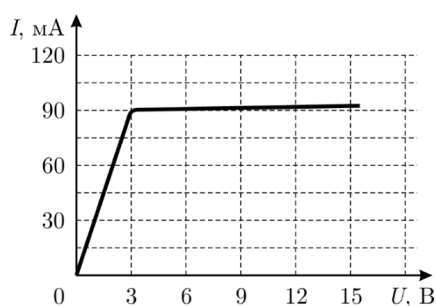


Рис. 2.

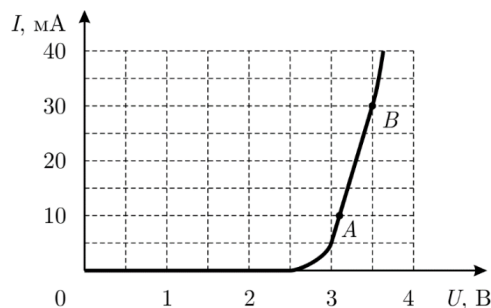


Рис. 3.

Пусть в нашем распоряжении есть много светодиодов для сборки гирлянды, блок питания большой мощности, обеспечивающий постоянное напряжение $U_0 = 14,9$ В, а также стабилизатор тока.

1. Определите диапазон рабочих токов и напряжений для гирлянды, состоящей из n ветвей, в каждую из которых включено m светодиодов. Чему может быть равно m , если гирлянда работает нормально?
2. Постройте вольтамперную характеристику для блока питания с последовательно присоединённым к нему стабилизатором.
3. Определите m и n для гирлянды, которая обеспечивает максимальную суммарную яркость свечения светодиодов. Считайте яркость пропорциональной электрической мощности, потребляемой светодиодами.
4. Найдите m и n для гирлянды с максимальным КПД.

Подсказка

Рабочие токи и напряжения одного светодиода задаются точками A и B ; для гирлянды токи умножаются на n , напряжения — на m . Нагрузочную линию гирлянды сравните с изломом характеристики источника со стабилизатором.

Ответ

1) $10n \leq I \leq 30n$ (мА), $3,1m \leq U \leq 3,5m$ (В); нормальная работа возможна при $1 \leq m \leq 4$;
2) график ВАХ источника со стабилизатором — ломаная: почти горизонтальный участок на уровне ≈ 90 мА до $U \approx 13,4$ В, затем быстрый спад до нуля при $U_0 = 14,9$ В; 3) максимальная суммарная яркость при $m = n = 4$; 4) максимальный КПД при $m = 4, n = 2$.