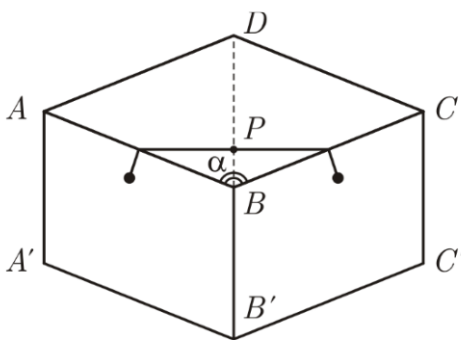


МОШ, 2017/18, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Грузы на призме с нитью

На подставку в форме прямой четырёхугольной призмы (в основании ромб $ABCD$, $\angle ABC = \alpha$, боковые грани — прямоугольники) кладут два маленьких груза, связанных тонкой невесомой натянутой нитью, и отпускают их. Трения нет. Массы грузов одинаковы. Середина нити (точка P) движется по диагонали DB . Грузы движутся по прямым линиям симметрично относительно плоскости $BB'D'D$. Найдите модули ускорений грузов и модуль ускорения середины нити. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Подсказка

Нить натянута, а середина её движется по диагонали. Какой угол с вертикалью составляет участок нити от ребра до груза, и какая составляющая силы тяжести направлена вдоль грани?

Ответ

Ускорения грузов и ускорение середины нити одинаковы по модулю и равны $a = g \sin \frac{\alpha}{2}$.

2 Цикл Стирлинга с регенератором

Цикл Стирлинга состоит из двух изохор и двух изотерм. Для увеличения КПД этого цикла используют регенератор — тепловой резервуар, которому рабочее тело (идеальный газ) отдаёт некоторое количество теплоты Q^* при изохорном охлаждении, и от которого получает такое же количество теплоты Q^* при изохорном нагревании. Эффективность регенератора характеризуется коэффициентом $k = Q^*/Q_V$, где Q_V — полное количество теплоты, получаемое рабочим телом на участке изохорного нагревания. КПД цикла зависит от коэффициента регенерации k .

Пусть КПД некоторого цикла Стирлинга с регенерацией изменяется от минимально возможного значения $1/6$ до максимально возможного значения $1/3$ в зависимости от коэффициента k .

1. Во сколько раз максимальная температура газа в течение этого цикла больше минимальной температуры?

2. Определите КПД этого цикла при коэффициенте регенерации $k = 1/2$ (при тех же температурах нагревателя и холодильника).

Ответы должны быть даны в виде чисел.

Подсказка

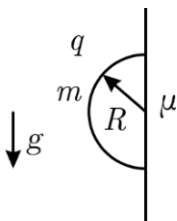
КПД равен отношению работы цикла к полученной теплоте; при $k = 1$ он совпадает с КПД цикла Карно. Работа на каждой изотерме пропорциональна её температуре, а теплота изохорного нагревания определяется разностью температур.

Ответ

- 1) максимальная температура газа в течение цикла больше минимальной в 1,5 раза; 2) при $k = 1/2$ КПД цикла равен $\eta(1/2) = \frac{2}{9}$.

3 Заряженная полусфера у стенки

Однородную полусферу радиусом R и массой m , равномерно заряженную по поверхности зарядом q , приложили основанием к вертикальной протяжённой металлической плоской стене (см. рисунок). Заряды по сфере не перераспределяются.



1. С какой силой полусфера притягивается к стене?
2. При каком коэффициенте трения μ между стеной и полусферой она будет покоиться, «прилипнув» к стене?
3. При каких значениях массы полусферы при заданном коэффициенте трения $\mu < 1$ полусфера будет скользить вниз вдоль стены, не отрываясь от неё?

Центр масс однородной полусферы находится на расстоянии $R/2$ от центра её основания.

Подсказка

Металлическая стена действует на заряды так же, как «зеркальное» изображение полусферы с зарядом противоположного знака. Сила притяжения равна силе отталкивания половин целой равномерно заряженной сферы.

Ответ

- 1) $F = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^2}$; 2) полусфера будет покоиться при $\mu > \frac{8\pi\epsilon_0 m g R^2}{q^2}$; 3) полусфера будет скользить вниз вдоль стены, не отрываясь от неё, при $m \geq \frac{\mu q^2}{8\pi\epsilon_0 g R^2}$.

4 Электроны между коаксиальными цилиндрами

Два длинных коаксиальных цилиндра расположены внутри катушки, создающей в них однородное магнитное поле с индукцией B , направленное вдоль оси системы. К цилиндрам приложено электрическое напряжение, благодаря чему между ними возникает электрическое поле напряжённостью E , направленное от внешнего цилиндра к внутреннему вдоль их радиусов. Внутренний цилиндр разогрет и испускает электроны. Начальные скорости электронов можно считать малыми. Найдите максимальное расстояние между цилиндрами, при котором ещё возможно протекание электрического тока между ними. Расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. Масса электрона m , заряд электрона e .

Подсказка

Из-за малого зазора поле можно считать плоским. Магнитная сила меняет составляющую скорости вдоль электродов; запишите связь этой составляющей со смещением от внутреннего цилиндра. Ток прекращается, когда электрон только касается внешнего цилиндра.

Ответ

Протекание тока между цилиндрами возможно при расстоянии между ними не более $y_{\max} = \frac{2mE}{|e|B^2}$.

5 Вогнутое зеркало в комнате смеха

Школьник Вася пошёл в комнату смеха и обнаружил там большое круглое вогнутое зеркало, стоящее на полу и закреплённое так, что центр зеркала находился на уровне $H = 1,5$ м над полом, а ось симметрии зеркала была горизонтальной. Насмеявшись вдоволь, Вася заметил, что его изображение в зеркале при определённых расстояниях до него либо сильно расплывается, либо получается нечётким, и он не может себя разглядеть. Для того чтобы исследовать это явление, Вася начал приближаться к зеркалу, идя издалека вдоль его оптической оси и наблюдая при этом за изображениями своих глаз. Оцените, в каком диапазоне расстояний от глаз до центра отражающей поверхности зеркала школьник мог видеть чёткое изображение своих глаз. Диаметр зеркала $2H = 3$ м, радиус кривизны отражающей поверхности $R = 15$ м, расстояние от пола до глаз у Васи $h = H = 1,5$ м. Наименьшее расстояние, с которого Вася может рассматривать что-либо в подробностях (например, читать условие этой задачи), равно $a = 0,2$ м. Будем также считать для упрощения задачи, что бесконечно удалённые от глаз объекты Вася может разглядеть вне зависимости от их размеров.

Подсказка

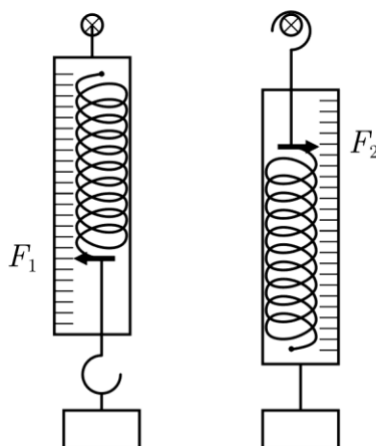
Глаз Васи находится у самой оси зеркала. Запишите формулу зеркала и найдите, при каких расстояниях изображение глаз оказывается дальше a от них, а при каких — нет; не забудьте про случай изображения за зеркалом.

Ответ

Школьник мог видеть чёткое изображение своих глаз при расстояниях от глаз до центра отражающей поверхности зеркала $[a/2; R/2]$ и $[R + a/2; \infty)$, то есть $[0,1 \text{ м}; 7,5 \text{ м}]$ и $[15,1 \text{ м}; \infty)$.

6 Два динамометра и груз

У Васи есть два совершенно одинаковых динамометра с очень лёгкими пружинами и массивными корпусами. Эти динамометры не отградуированы, но оба имеют шкалы с линейной зависимостью показаний от растяжения пружины. Если к крючку пружины динамометра подвесить груз с известной массой m , и держать динамометр за корпус вертикально, то динамометр показывает некоторое значение F_1 (см. рисунок). Если прикрепить тот же груз к корпусу динамометра и удерживать динамометр с грузом в вертикальном положении за крючок пружины, то динамометр показывает другое значение F_2 (причём $F_2 > F_1$). Вася привязал другой груз с неизвестной массой M между двумя динамометрами, и держит сверху эту конструкцию за её наивысшую точку так, что динамометры занимают вертикальное положение. При этом верхний динамометр показывает значение F_3 , а нижний динамометр показывает значение F_4 . Основываясь на результатах проведённых измерений, Вася вычислил массу M груза. Чему может быть равна эта масса M , если все четыре упомянутых показания динамометров различны и не равны нулю? Крючок пружины ненагруженного динамометра выступает за пределы его корпуса.



Подсказка

Показание динамометра линейно зависит от силы, растягивающей пружину: $F = A + \alpha \cdot (\text{масса})$. Переберите, как каждый из двух динамометров может быть включён в цепочку (пружина ниже корпуса или выше) и какую массу удерживает его пружина.

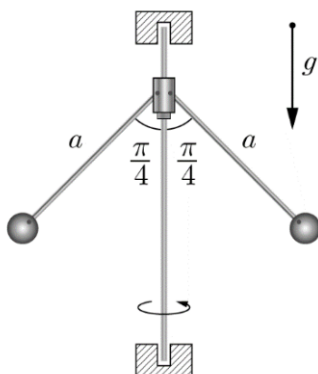
Ответ

В зависимости от способа подвешивания масса груза могла быть равна $M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4} m$,
или $M = \frac{F_1 - F_2 + F_3 - F_4}{F_2 - F_4} m$, или $M = \frac{F_3 - F_4}{F_2 - F_4} m$, или $M = \frac{2F_1 - 2F_2 + F_3 - F_4}{F_1 - F_4} m$.

7 Центробежный регулятор

На рисунке изображена упрощённая модель центробежного регулятора. Два одинаковых тяжёлых груза при помощи лёгких жёстких стержней с длинами a и шарниров соединены с вращающимся валом, ось которого вертикальна. Конструкция шарниров позволяет стержням свободно отклоняться от этой оси, однако грузы и вал вращаются с одинаковой угловой скоростью ω , которая поддерживается постоянной при помощи внешнего привода. Установившиеся при

вращении равновесные положения стержней таковы, что угол между стержнями равен 90° . Определите период малых колебаний грузов относительно положения равновесия при вращении. Трения в шарнирах и в подшипниках крепления вала нет. Размеры грузов малы по сравнению с длиной стержней.



Подсказка

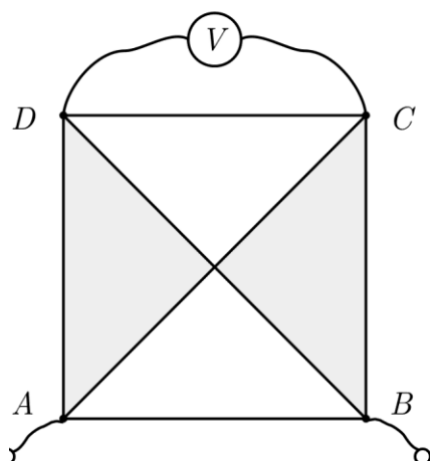
Перейдите во вращающуюся систему отсчёта: на груз действуют сила тяжести, сила реакции стержня и центробежная сила. Энергию в неподвижной системе сохранять нельзя — привод совершает работу.

Ответ

Период малых колебаний грузов относительно положения равновесия равен $T = 2\pi\sqrt{\frac{a\sqrt{2}}{g}}$.

8 Пластина из серых и белых проводников

Квадратная пластина составлена из проводников двух сортов: серого и белого (см. рисунок). Удельное сопротивление белого проводника вдвое меньше, чем серого. Сопротивление пластины между вершинами A и B равно r_1 . Если через эти вершины пропускать ток силой I , то идеальный вольтметр, подключённый к вершинам C и D , показывает значение напряжения U_1 . После охлаждения пластины удельное сопротивление белых проводников уменьшилось вдвое, а серых — в восемь раз. Сопротивление пластины между вершинами A и B при этом стало равным r_2 , а при пропускании через эти вершины прежнего тока силой I тот же вольтметр стал показывать значение U_2 .



1. Найдите сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения.
2. Найдите сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения.

Подсказка

Охлаждение меняет сопротивления серых и белых частей в разное число раз, поэтому пластина после охлаждения — это комбинация двух «исходных» пластин. Для сопротивления между A и C используйте принцип суперпозиции токов и потенциалов.

Ответ

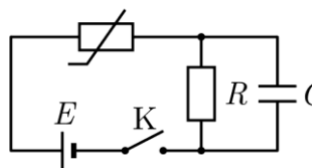
1) сопротивление пластины между вершинами B и C до её охлаждения равно $4r_2$; 2) сопротивление пластины между вершинами A и C до её охлаждения равно $R_{AC} = \frac{1}{2}(r_1 + 4r_2) + \frac{U_1 + 4U_2}{2I}$.

9 Бареттер и конденсатор

Нелинейный элемент бареттер обладает свойством поддерживать постоянной силу тока через себя в некотором диапазоне рабочих напряжений от U_0 до U_1 (диапазон напряжений стабилизации). Обозначим эту постоянную силу тока через I_0 (ток стабилизации). При напряжениях, меньших U_0 , бареттер ведёт себя как резистор с сопротивлением $R_0 = U_0/I_0$. Бареттер на схеме цепи изображается как резистор, перечёркнутый отрезком ломаной линии, похожим на клюшку.

Используя бареттер, конденсатор ёмкостью $C = 10$ мкФ, идеальную батарейку с ЭДС $E = 6$ В, ключ и резистор с сопротивлением R , собрали цепь, схема которой изображена на рисунке.

Параметры бареттера: диапазон напряжений стабилизации от $U_0 = 2$ В до $U_1 = 6$ В, ток стабилизации $I_0 = 20$ мА. Проанализируйте процесс зарядки конденсатора после замыкания ключа при разных значениях сопротивления резистора и ответьте на следующие вопросы.



1. До какого напряжения зарядится конденсатор, если $R = 50$ Ом? А если $R = 500$ Ом?
2. Пусть $R = 200$ Ом. Чему равна сила тока, текущего через резистор в тот момент, когда скорость изменения энергии конденсатора в процессе зарядки максимальна?
3. Пусть $R = 5000$ Ом. За какое время конденсатор зарядится до половины максимального заряда?

Подсказка

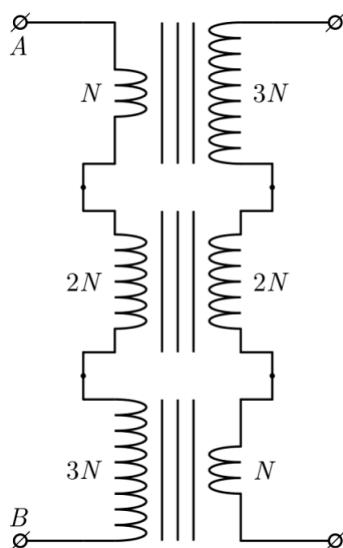
В установившемся режиме ток через конденсатор не идёт, и ток бареттера равен току резистора. Сравните ток, который мог бы дать резистор при напряжении батарейки, с током стабилизации.

Ответ

1) при $R = 50$ Ом конденсатор зарядится до напряжения 1 В, а при $R = 500$ Ом — до напряжения 5 В; 2) при $R = 200$ Ом сила тока, текущего через резистор в тот момент, когда скорость изменения энергии конденсатора в процессе зарядки максимальна, равна 10 мА; 3) при $R = 5000$ Ом конденсатор зарядится до половины максимального заряда за время 1,5 мс.

10 Каскад из трёх трансформаторов

В лаборатории решили изготовить три трансформатора с одинаковыми сердечниками. На каждый из сердечников намотали по $4N$ витков провода, по-разному распределив их между первичными и вторичными обмотками трансформаторов. Три полученных трансформатора соединили в цепь, схема которой показана на рисунке. На вход цепи (контакты A и B) подали гармоническое напряжение, а к выходу цепи никакой нагрузки не подключили. Каким может быть для этой цепи отношение амплитуды выходного напряжения к амплитуде входного напряжения? Влиянием обмоток соседних трансформаторов друг на друга можно пренебречь.



Подсказка

Первичные обмотки соединены последовательно, поэтому напряжение делится пропорционально индуктивностям, то есть квадратам чисел витков. Вторичные обмотки включены последовательно, но фазу каждой нужно рассмотреть отдельно.

Ответ

Отношение амплитуды выходного напряжения к амплитуде входного напряжения цепи может принимать три возможных значения: $1/7$, $2/7$ или $5/7$.