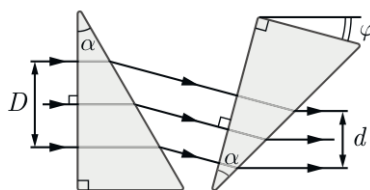


МОШ, 2018/19, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Анаморфные призмы

Две одинаковые призмы ($\alpha = 30^\circ$, рис. 1), изготовленные из материала с показателем преломления n , используют для изменения поперечного размера пучка параллельных лучей.



1. Для $n = 1,73$ найдите угол φ между основаниями призм.
2. Найдите для произвольного n отношение $\frac{d}{D}$. Какие значения может принимать n ?

Ответ

1) $\varphi = 30^\circ$; 2) $\frac{d}{D} = \frac{4 - n^2}{3}, n < 2$.

2 Измерение показателя адиабаты

Адиабатический процесс для идеального газа описывается уравнением $pV^\gamma = \text{const}$, где p — давление, V — объём, γ — безразмерная величина, называемая показателем адиабаты. Для определения γ ставят следующий эксперимент. Стекланный баллон заполняют исследуемым газом и измеряют его давление p_1 , большее атмосферного давления p_0 . При этом температура в баллоне равна температуре в комнате. Затем на короткое время открывают кран и часть газа выходит из баллона. Можно считать, что при открытом кране оставшийся в баллоне газ расширяется адиабатически. Кран закрывают, когда давление в баллоне становится равно p_0 . После этого дожидаются выравнивания температур в баллоне и комнате и измеряют давление в баллоне p_2 в конечном состоянии. Определите γ , если $p_0 = 10^5$ Па, $p_1 = 1,060 \cdot 10^5$ Па, $p_2 = 1,017 \cdot 10^5$ Па.

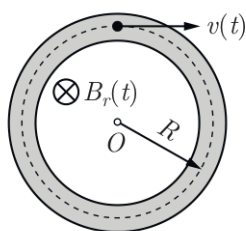
Примечание. Возможно, окажется полезной приближённая формула $(1 + x)^n \approx 1 + nx, x \ll 1$.

Ответ

$\gamma \approx 1,4$.

3 Бетатрон

В ускорителе электронов бетатроне (рис. 2) изменяющееся во времени магнитное поле, индукция которого $B_r(t)$ зависит от расстояния r до оси симметрии O , порождает вихревое электрическое поле, разгоняющее частицы. Мы хотим, чтобы электроны всё время двигались по окружности радиусом R . Определите численное значение отношения $\frac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\pi R^2}$ при таком движении. Φ_R — поток магнитного поля через поверхность круга радиусом R . $B_R(t)$ — индукция магнитного поля в момент времени t на расстоянии R от оси симметрии. Считайте, что $\Phi_R(0) = 0$, $v(0) = 0$.



Ответ

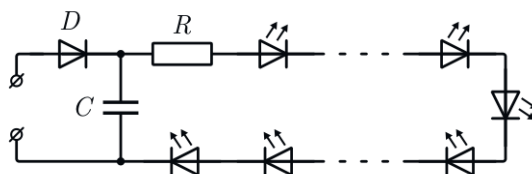
$$\frac{\Phi_R(t)}{B_R(t)\pi R^2} = 2.$$

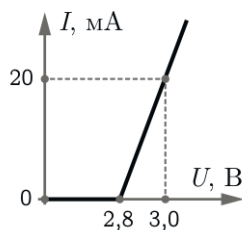
4 Подобрать детали

По схеме, показанной на рис. 3, решили изготовить светодиодный светильник, работающий от сети переменного напряжения ($\nu = 50$ Гц, $U = 230$ В, $U_{\max} = 325$ В). Диод D можно считать идеальным. Всего используется 60 одинаковых светодиодов. Вольт-амперная характеристика одного светодиода показана на рис. 4. Ток через светодиод не должен превышать 20 мА. Имеются резисторы и конденсаторы с номиналами, указанными в таблице. W — максимально допустимая мощность, выделяющаяся в резисторе, при работе в штатном режиме. U — максимальное напряжение, которое выдерживает конденсатор без повреждения.

Таблица. Номиналы резисторов и конденсаторов без повреждений.

№	1	2	3	4	5	6	7
R , кОм; W , Вт	0,91; 5	1,2; 5	7,5; 2	4,7; 5	6,8; 1	8,2; 5	75; 2
C , мкФ; U , В	0,1; 450	100; 250	20; 350	15; 350	4,7; 300	10; 350	6,8; 300





Желательно, чтобы при работе светильника максимальное отклонение тока через светодиод от среднего значения составляло не более 5%, при этом световой поток был бы максимальным. Выберите подходящие резистор и конденсатор из указанных в таблице. Если подходящих элементов несколько — укажите номера всех.

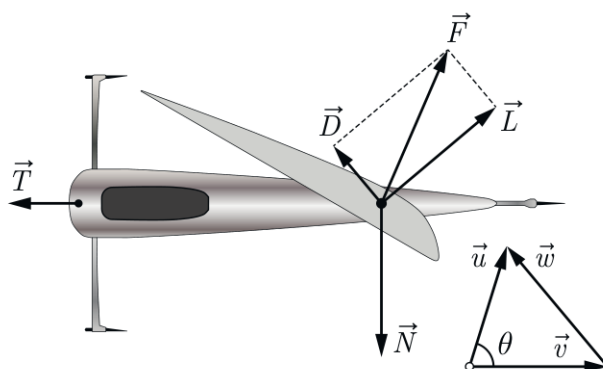
Ответ

Подходит резистор с сопротивлением 8,2 кОм, рассчитанный на 5 Вт (№ 6); лучший выбор — конденсатор ёмкостью 20 мкФ (№ 3), но конденсаторы ёмкостью 10 мкФ (№ 6) и 15 мкФ (№ 4) тоже подходят.

5 Парус как крыло

Динамика буера (ледовой яхты, рис. 5) может быть описана на основе модели, в которой парус считается вертикально расположенным крылом. Силу $\vec{F}$, действующую на парус со стороны воздуха (см. рис. 6, вид сверху), принято раскладывать на две составляющие: $\vec{D}$, направленную вдоль скорости $\vec{w}$ потока воздуха относительно буера, и $\vec{L}$, перпендикулярную $\vec{D}$. Можно считать, что $D = C_D \frac{\rho w^2}{2} S$, $L = C_L \frac{\rho w^2}{2} S$, где S — площадь паруса, ρ — плотность воздуха; безразмерные коэффициенты C_D и C_L зависят только от ориентации паруса относительно набегающего потока воздуха. Взаимодействие с горизонтальной поверхностью снега (или льда) характеризуется силами $\vec{T}$ (трения) и горизонтальной реакции $\vec{N}$. Далее везде трением мы пренебрегаем. Угол между скоростью буера $\vec{v}$ и скоростью ветра относительно земли $\vec{w}$ обозначим θ .





1. Пусть известно, что буер движется с постоянной скоростью. Отношение $\frac{C_L}{C_D} = k$ задано. Кроме того даны скорость ветра u и угол θ . Определите скорость буера v . Если параметр k и скорость ветра u остаются постоянными, а угол θ может изменяться от 0° до 90° , то чему равна максимально возможная скорость буера v в рамках данной модели?
2. На рис. 7 показана кривая, координаты точек которой равны значениям коэффициентов C_D и C_L для разных положений паруса относительно набегающего потока воздуха. Определите максимально возможное ускорение буера при старте из положения покоя. Скорость ветра $u = 10$ м/с, масса буера и человека 100 кг, площадь паруса 7 м², атмосферное давление нормальное, температура воздуха -10° С.

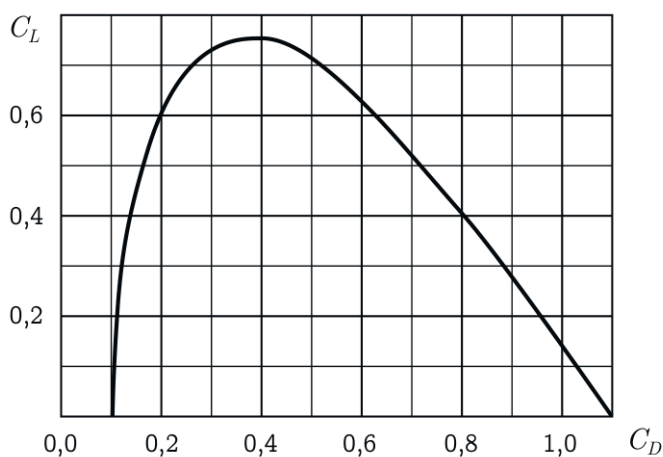


Рис. 7

3. Используя кривую, показанную на рис. 7, определите при каких значениях угла θ возможно движение буера с постоянной скоростью.

Ответ

1) $v = u(\cos \theta + k \sin \theta)$, $v_{\max} = u\sqrt{k^2 + 1}$; 2) $a_{\max} = 1,1 \frac{\rho u^2 S}{2m} \approx 5$ м/с²; 3) $0^\circ < \theta < 162^\circ \pm 2^\circ$.

6 Шарик на ниточке

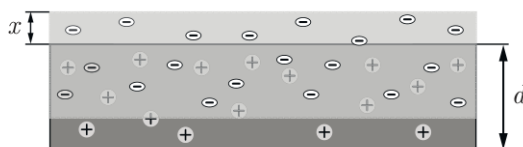
Человек раскручивает в вертикальной плоскости полиуретановый шарик, закреплённый на одном конце тонкой, но прочной, нерастяжимой нитки, держась за петельку на другом её конце. Когда скорость шарика становится достаточно большой и почти перестаёт изменяться, точка, в которой человек держит петлю, движется по окружности радиусом r . Определите минимально возможное значение r , если длина нитки между петлёй и шариком равна $L = 1$ м, а радиус шарика равен 1 см. Плотность полиуретана равна $\rho = 1200$ кг/м³. Сила сопротивления воздуха даётся соотношением $F_D = \frac{\rho_0 v^2}{4} S$, где ρ_0 — плотность воздуха, S — площадь поперечного сечения шара, v — его скорость. Молярная масса воздуха равна $\mu = 29$ г/моль. Воздух находится при нормальных условиях. Можно считать, что $v \gg \sqrt{gL}$. Ускорение свободного падения равно $g = 10$ м/с².

Ответ

$$r \approx L \cdot \frac{3L}{16\rho R_0} \cdot \frac{p\mu}{RT} \approx 20 \text{ мм}$$

7 Плазменная частота

Частоту колебаний пространственного заряда в плазме (ионизованном газе) можно определить на основании следующих модельных представлений. Имеется слой плазмы в виде прямоугольного параллелепипеда. Концентрация ионов с зарядом $+e$ равна n и равна концентрации электронов. Ионы и электроны в слое распределены однородно. Можно считать, что слой электронов накладывается на слой ионов. Толщина слоя d много меньше других его линейных размеров. При малом смещении x ($x \ll d$) слоя электронов в направлении нормали к слою (рис. 1) возникают малые колебания. Определите угловую частоту ω этих колебаний. Считайте, что однородность распределения зарядов не нарушается, концентрация не меняется, ионы (поскольку они тяжёлые) — неподвижны. Масса электрона равна m_e , его заряд равен e .

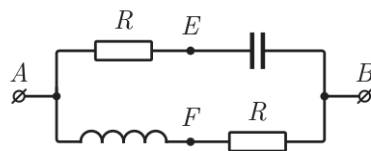


Ответ

$$\omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}.$$

8 Цепь с неизвестными

В цепи, изображённой на рис. 2, сопротивление каждого из резисторов равно R . Выводы A и B цепи на время t_0 подключают к идеальному источнику с ЭДС $\mathcal{E}$. Индуктивность катушки и ёмкость конденсатора подобраны таким образом, что при подключенном источнике в любой момент времени разность потенциалов точек E и F равна нулю. Определите заряд, протекающий через источник за время t_0 . Если за время подключения источника в резисторах суммарно выделяется количество теплоты Q , то какое количество теплоты выделится в одном резисторе после отключения источника?



Ответ

$$q = \frac{\mathcal{E}t_0}{R}; \text{ в каждом резисторе выделяется количество теплоты } Q_1 = \frac{\mathcal{E}^2 t_0}{2R} - \frac{Q}{2}.$$

9 Фотография пластины

Диск толщиной около 1,5 см, сделанный из прозрачного материала, разрезали вдоль одного из диаметров. Получившуюся пластину, имеющую форму половины цилиндра, поставили на «миллиметровку», так что поверхность, вдоль которой разрезали диск, оказалась обращена вниз, а выпуклая поверхность полуцилиндра — вверх. Затем эту пластину фотографируют сверху, стараясь ориентировать оптическую ось объектива фотоаппарата вертикально (рис. 3), так чтобы она проходила через середину пластины. Фотография приведена ниже.

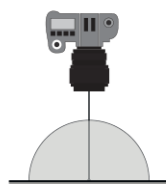
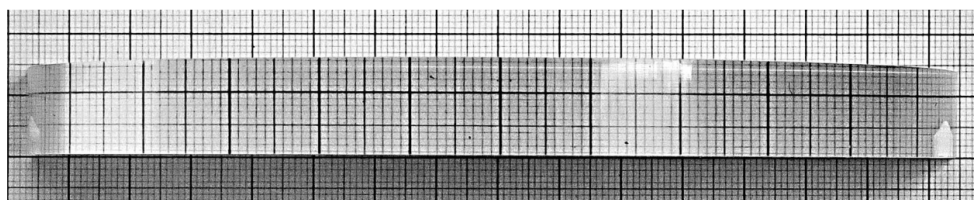


Рис. 3



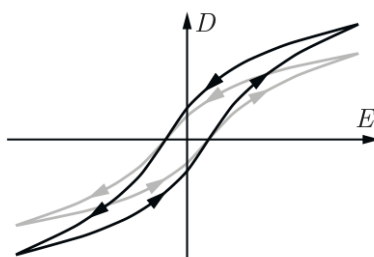
1. Определите показатель преломления материала пластины.
2. На фотографии внутри пластины видны изображения полос сетки. Какое максимальное количество изображений полос, перпендикулярных пластине, может увидеть наблюдатель, располагающийся на расстоянии $h = 15$ см над центром пластины?
3. Оцените расстояние H от «миллиметровки» до главной плоскости объектива фотоаппарата при фотографировании пластины.

Ответ

1) $n = 1,47 \pm 0,05$; 2) $N = 103 \pm 3$; 3) $H \approx 28 \pm 4$ см.

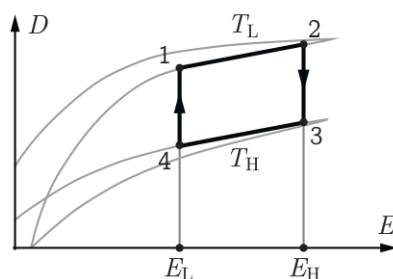
10 Электрокалорический генератор

В электродинамике при описании диэлектриков вводится в рассмотрение вектор электрической индукции $\vec{D}$. Вектор $\vec{D}$ количественно характеризует поле только (!) свободных зарядов, вектор $\vec{E}$ — поле свободных зарядов и поляризационных зарядов, возникающих в диэлектриках. Обычно вектор $\vec{D}$ пропорционален вектору $\vec{E}$. Однако, существуют материалы (сегнетоэлектрики) с нелинейной зависимостью $\vec{D}$ от $\vec{E}$. В этой задаче векторы $\vec{D}$ и $\vec{E}$ сонаправлены. Схематично вид зависимости $D(E)$ для типичного сегнетоэлектрика при постоянной температуре показан на рис. 5 чёрной линией. Зависимость $D(E)$ для того же сегнетоэлектрика при более высокой температуре схематично показана серой линией. Обе зависимости обладают ярко выраженным гистерезисом, иначе говоря, значение D для данного E зависит от характера изменения поля E (увеличивается или уменьшается). Впрочем, в данной задаче это несущественно.



Вид зависимости $D(E)$ в некоторых сегнетоэлектриках весьма сильно меняется с температурой, что позволяет их использовать для преобразования тепловой энергии в электрическую. Присоединим конденсатор с сегнетоэлектриком к идеальному источнику постоянного напряжения. Периодически изменяя температуру сегнетоэлектрика, можно получить периодически изменяющийся ток в цепи. При этом работа источника напряжения за цикл будет равна нулю. Получится преобразователь тепловой энергии в работу тока. Можно считать, что сегнетоэлектрик — это своеобразное рабочее тело тепловой машины, которое характеризуется параметрами: D , E , T .

Рассмотрим модельный цикл, показанный на рис. 6. Процессы 1–2 и 3–4 — зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком при постоянной температуре. 2–3 и 4–1 — нагревание и охлаждение при постоянном электрическом поле. Цикл имеет форму параллелограмма.



Термодинамика сегнетоэлектрика описывается соотношениями, справедливыми для малых (!) изменений параметров ΔE , ΔD , ΔT :

$$\Delta D = \varepsilon_0 \varepsilon \Delta E + p \Delta T, \quad \frac{\Delta Q}{V} = c \Delta T + p T \Delta E, \quad \frac{\Delta A}{V} = D \Delta E,$$

где ε , p и c ($\varepsilon > 0$, $p < 0$, $c > 0$) — известные постоянные коэффициенты. Объём V считается постоянным. ΔQ и ΔA — количество теплоты и работа при малых изменениях параметров. Для решения задачи этих соотношений достаточно.

1. Определите КПД цикла 1234. Величины E_L , E_H и T_L , T_H считайте известными ($T_L < T_H$). Если предположить, что E_L и E_H могут изменяться неограниченно, то чему равен максимальный КПД этого цикла?
2. Изобразите качественно на диаграмме D – E термодинамический цикл 12'34', в котором на участках 1–2' и 3–4' зарядка и разрядка конденсатора с сегнетоэлектриком происходят адиабатически. Температуры в точках 1 и 3 равны T_L и T_H .
3. Определите КПД цикла из п. 2), считая E_L , E_H и T_L , T_H известными, а изменения параметров D , E и T в пределах цикла малыми. У какого цикла при одинаковых E_L , E_H , $T_1 = T_L$ и $T_3 = T_H$ больше КПД – у 1234 или у 12'34'?

Ответ

1) $\eta_1 = \frac{-p(T_H - T_L)(E_H - E_L)}{c(T_H - T_L) - pT_H(E_H - E_L)}$; 2) цикл показан на рисунке; 3) $\eta_2 = \frac{r \Delta T}{\Delta T - rT_L}$, где $r = -\frac{p \Delta E}{c}$, $\eta_2 > \eta_1$.

