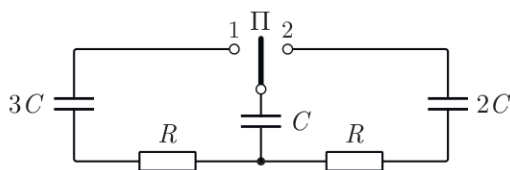


МОШ, 2019/20, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Конденсаторы

В цепи, схема которой изображена на рисунке, в начальный момент времени конденсатор ёмкостью $3C = 300$ мкФ заряжен до напряжения $U_0 = 12$ В, конденсаторы ёмкостью C и $2C$ не заряжены. Переключатель Π в среднем положении.



Переключатель Π сначала перекидывают в положение 1 на короткое время (много меньшее RC), а затем в положение 2 на гораздо большее время. Определите заряды конденсаторов после многократного повторения этих двух операций. Найдите приближённо, какое количество теплоты выделяется в каждом из резисторов.

Подсказка

В положении 1 заряд перераспределяется между $3C$ и C без потерь на «длинных» резисторах, в положении 2 конденсатор C разряжается на $2C$. Что остаётся неизменным в каждой из этих двух операций и к какому пределу сходится процесс?

Ответ

$$q_3 = \frac{3CU_0}{2} = 5,4 \text{ мКл}, q = \frac{CU_0}{2} = 1,8 \text{ мКл}, q_2 = CU_0 = 3,6 \text{ мКл}, Q_1 \approx \frac{3CU_0^2}{4} \approx 6,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, Q_2 \approx 0.$$

2 Сосуд во льдах

Герметичный металлический сосуд заполняют смесью воздуха и водяного пара и начинают охлаждать, поместив в термостат с тающим льдом. В процессе охлаждения измеряют температуру в сосуде с погрешностью $\Delta T = 0,5^\circ\text{C}$ и давление — с погрешностью $\Delta p = 0,05 \cdot 10^5$ Па. В результате получают таблицу.

$t, ^\circ\text{C}$	137	123	109	82	55	27	0
$p, 10^5 \text{ Па}$	1,5	1,45	1,4	1,3	0,8	0,7	0,6

Определите отношение количества воды к количеству воздуха в сосуде, а также плотность газовой фазы в начале и в конце процесса. Учтите, что давление насыщенных паров воды, равное 1 кПа, достигается при температуре около 7°C . Молярные массы воды и воздуха равны соответственно 18 г/моль и 29 г/моль.

Подсказка

Сравните, как давление зависит от температуры в начале таблицы и в конце: на каком участке газ ведёт себя как идеальный при постоянном объёме, а где часть пара конденсируется? Сколько пара остаётся при 0°C ?

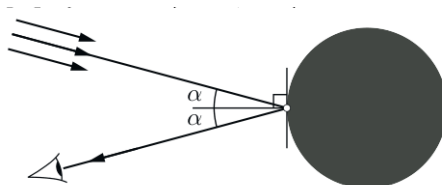
Ответ

$$\frac{\nu_{\text{возд.}}}{\nu_{\text{вод.}}} = \frac{3}{2}, \rho_{\text{H}} = 1,1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}, \rho_{\text{K}} = 0,77 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

3 Изображения в шаре

Наблюдатель видит изображение Солнца в полированном металлическом шаре. Угловая высота Солнца над горизонтом равна α и равна углу между линией зрения и горизонтальной нормалью к шару. Определите характерный размер изображения Солнца, если радиус шара равен R , а угловой размер Солнца равен φ ($\varphi \ll \alpha$).

Примечание. Для малого угла φ справедливы приближённые формулы: $\cos \varphi \approx 1$, $\sin \varphi \approx \varphi$.



Подсказка

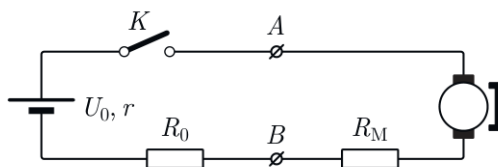
Лучи от краёв Солнца падают на шар под углами $\alpha \pm \varphi/2$. Найдите, как смещается точка отражения по поверхности шара при изменении угла падения на малую величину.

Ответ

$$\Delta L = \frac{R \cos \alpha}{2} \varphi.$$

4 Модели стартера

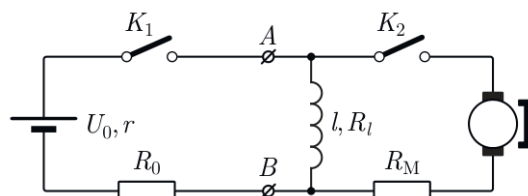
На рисунке изображена простейшая модельная схема подключения электродвигателя (автомобильного стартера) к аккумулятору.



Параметр схемы $R_{\text{M}} = 2 \cdot 10^{-2}$ Ом моделирует сопротивление обмоток якоря двигателя, r и R_0 — внутреннее сопротивление аккумулятора с ЭДС $U_0 = 12$ В и сопротивление проводов, при этом $R_0 + r = 10^{-2}$ Ом. Можно считать, что ЭДС индукции, вырабатываемая электродвигателем, пропорциональна угловой скорости вращения вала $|\mathcal{E}_i| = k\omega$, а момент сил, действующих на вал со стороны магнитного поля, пропорционален току $M = kI$. Для упрощения расчётов далее полагаем, что вал электродвигателя не нагружен.

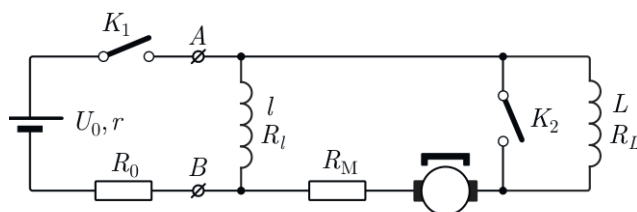
1. Найдите напряжение U_{AB} на клеммах электродвигателя (между т. A и т. B) сразу после замыкания ключа, а также максимальное значение силы тока в цепи. Чему равен ток в момент, когда угловая скорость вращения вала составляет 75% от максимального значения? (3 балла)

Другая модельная схема (рис. ниже) учитывает наличие в конструкции удерживающей обмотки втягивающего реле, R_l — сопротивление катушки индуктивностью l . При включении сначала замыкается ключ K_1 , а когда ток через катушку установится, замыкается ключ K_2 .



2. Считая, что отношение $\alpha = \frac{R_l}{r + R_0}$ известно ($\alpha > 1$), определите максимальное значение тока через двигатель в этом случае. (4 балла)
3. При выключении электродвигателя (после того, как скорость вращения вала установится) сначала размыкают ключ K_1 . При этом напряжение на клеммах двигателя почти мгновенно увеличивается на $\Delta U_{AB} = 2$ В. Определите по этим данным параметр α . (3 балла)

Наиболее близка к реальному устройству схема, изображённая на третьем рисунке. Ключи изначально разомкнуты. Поворот ключа зажигания соответствует замыканию ключа K_1 . Когда ток через катушку L достигает некоторого порогового значения I_{Π} замыкается ключ K_2 (магнитное поле катушки втягивает шток, замыкающий контакты ключа K_2).



4. Индуктивность второй катушки L и её сопротивление R_L таковы, что выполняются равенства: $L = 10l$, $R_L = 5R_l$. Известно, что значение тока I_{Π} лежит между 10 А и 20 А. Чему равен ток через катушку индуктивности l в момент замыкания ключа K_2 ? Численное значение параметра α считайте известным из п. 3). (2 балла)

Подсказка

Сразу после замыкания ключа ЭДС индукции двигателя равна нулю, а в установившемся режиме на невращающемся валу нагрузки ток двигателя нулевой. В пп. 2–4 помните, что ток через катушку индуктивности не может измениться скачком.

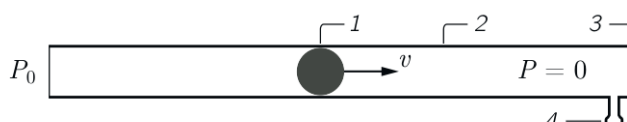
Ответ

$$1) U_{AB}(0) = \frac{U_0 R_M}{r + R_0 + R_M} = 8 \text{ В}; I_{\max} = \frac{U_0}{r + R_0 + R_M} = 400 \text{ А}; \text{ при 75\% от максимальной скорости } I = 100 \text{ А};$$

$$2) I_M = \frac{U_0}{r + R_0 + R_M} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha}; \quad 3) \Delta U_{AB} = U_0 \frac{R_M}{r + R_0} \cdot \frac{1}{1 + \alpha}, \alpha = 11; \quad 4) I_l^{(2)} = 100 \text{ А}.$$

5 Вакуумная пушка

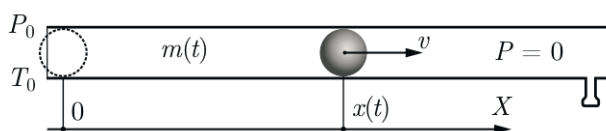
В последние годы большой интерес у энтузиастов, занимающихся научно-техническим творчеством, вызывает устройство под названием «вакуумная пушка». В полипропиленовой водопроводной трубе 2 (см. рисунок ниже), один конец которой герметично закрыт заглушкой из фольги 3, а другой открыт в атмосферу, разностью давлений ускоряется шарик 1 для игры в пинг-понг. Внутренний диаметр трубы близок к диаметру шарика. Рядом с заглушкой располагается штуцер 4, через который труба соединяется с вакуумным насосом. Таким образом, справа от шарика давление очень низкое, а у открытого конца трубки — давление, близкое к атмосферному, которое равно P_0 .



Оказывается, что при достаточно большой длине трубки и качественной откачке, шарик можно разогнать до высокой скорости, так что он легко разорвёт фольгу заглушки и вылетит из трубки. В одном видеоролике, доступном в сети, демонстрируется, как вылетающий из трубки шарик пробивает пустые банки из-под газировки, поставленные на небольшом расстоянии от трубки.

1. В самой грубой модели предполагается, что слева от шарика давление равно $P_0 = 10^5$ Па, а справа — равно нулю. Разность давлений не меняется в процессе разгона шарика. Трения между шариком и стенками трубы нет. До какой максимальной скорости $v_{\max}^{(1)}$ может быть разогнан шарик массой $M = 2,7$ г и диаметром $d = 40$ мм в трубе длиной $L = 2$ м? (1 балл)

В более точной модели считается, что под действием постоянной разности давлений ускоряется не только шарик, но и воздух массой $m(t)$, располагающийся в момент t в трубе слева от шарика, а также вовлекаются в движение новые порции воздуха из атмосферы. Предполагается считать, что область вблизи левого торца трубы, в которой воздух вовлекается в движение, имеет малый характерный размер, сопоставимый с диаметром трубы. Снаружи трубы вне этой области воздух остаётся неподвижным. Внутри трубы воздух движется со скоростью шарика, а его плотность равна плотности воздуха ρ снаружи. Диаметр шарика много меньше длины трубы. В начальный момент времени координата x шарика и его скорость равны нулю.



2. Определите более точное значение скорости $v_{\max}^{(2)}$, до которой может быть разогнан шарик тех же размеров, что и в п. 1) задачи, в трубе той же длины. Время разгона в первом приближении можно считать равным времени разгона в п. 1). Температура воздуха и его молярная масса равны: $T_0 = 293$ К, $\mu = 29$ г/моль соответственно. (3 балла)
3. Считая известными только температуру $T_0 = 293$ К снаружи трубы и молярную массу воздуха $\mu = 29$ г/моль, определите максимальную скорость, до которой может быть разогнан шарик. Длина трубы предполагается достаточно большой. (3 балла)
4. Даны параметры: M , S , P_0 , ρ , μ . Получите формулу зависимости координаты шарика от времени $x(t)$. (5 баллов)

Примечание. Может оказаться полезной формула $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$, справедливая для малых изменений ($\Delta x \ll x$) величины x .

Интересно, что группа из американского университета Пёрдью, немного усложнив конструкцию, сумела разогнать шарик до сверхзвуковой скорости ($v \approx 420$ м/с, в $M = 1,23$ раза больше скорости звука), так что после вылета из трубки шарик для настольного тенниса пробил ракетку для настольного тенниса. Видео можно найти в сети по фразе: «Purdue Technology students build supersonic ping pong gun». В усовершенствованной конструкции на левом конце трубки имеется баллон со сжатым воздухом и сопло Лаваля, через которое воздух поступает в «ствол пушки».

Подсказка

Запишите второй закон Ньютона для шарика вместе с разгоняемым воздухом в форме изменения импульса за малое время Δt : не забудьте, что в движение вовлекается новая масса Δm воздуха, покоившегося до этого.

Ответ

$$1) v_{\max}^{(1)} \approx 430 \text{ м/с}; \quad 2) v_{\max}^{(2)} \approx 199 \text{ м/с, при } v(t_0) = \frac{P_0 S t_0}{m(t_0) + M}; \quad 3) P_0 = \rho u^2, u \approx 294 \text{ м/с};$$

$$4) x(t) = -\frac{M}{\rho S} + \sqrt{\left(\frac{M}{\rho S}\right)^2 + \frac{P_0 t^2}{\rho}}.$$

6 Колебания внутри трубы

Внутри горизонтально расположенной трубы радиусом R , вращающейся с некоторой угловой скоростью вокруг своей оси симметрии, находится небольшое тело. В положении равновесия тело располагается ниже оси трубы, на расстоянии $0,8R$ по вертикали от неё. Найдите период малых колебаний тела в плоскости, перпендикулярной оси трубы.

Примечание. Для малого угла δ ($\delta \ll 1$) и произвольного угла α справедливы приближённые равенства: $\sin(\alpha + \delta) \approx \sin \alpha + \delta \cos \alpha$, $\cos(\alpha + \delta) \approx \cos \alpha - \delta \sin \alpha$.

Подсказка

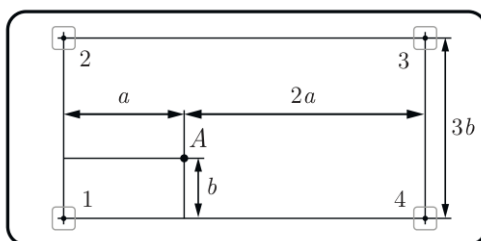
Тело покоится относительно стенки только благодаря трению: что говорит о коэффициенте трения угол, под которым оно сидит в равновесии? Запишите второй закон Ньютона вдоль трубы при малом смещении.

Ответ

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{5g}}.$$

7 Стол на тонких ножках

Стол стоит на горизонтальном полу. Столешницу и пол можно считать абсолютно твёрдыми, а ножки — упругими, подчиняющимися закону Гука при вертикальных деформациях.



Гирю массой 24 кг ставят на стол так, что её центр масс располагается в т. A (см. рисунок, вид сверху). На сколько изменяются силы давления ножек стола: ΔF_1 , ΔF_2 , ΔF_3 и ΔF_4 на пол после этого? Номера ножек показаны на рисунке.

Подсказка

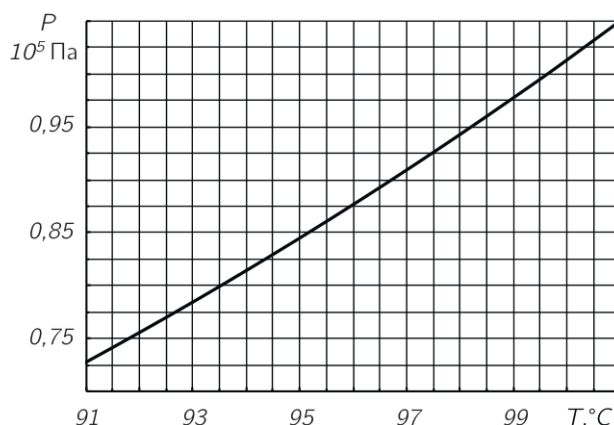
Кроме условий равновесия (сумма сил и два уравнения моментов) нужно использовать, что столешница твёрдая и остаётся плоской: деформации ножек связаны одним линейным соотношением.

Ответ

$\Delta F_1 = 100 \text{ Н}$, $\Delta F_2 = 60 \text{ Н}$, $\Delta F_3 = 60 \text{ Н}$, $\Delta F_4 = 20 \text{ Н}$.

8 Вода-пар-вода

Воде массой $m = 180 \text{ г}$ при постоянном давлении $p_1 = 10^5 \text{ Па}$ сообщают некоторое количество теплоты, так что она превращается в пар и нагревается до температуры $T_1 = 105^\circ\text{С}$. Далее пар адиабатически расширяется и в какой-то момент приходит в состояние насыщения, после чего конденсируется. График зависимости давления насыщенных паров воды от температуры показан на рисунке ниже.



Считая изменение параметров пара при адиабатическом расширении малым, определите приблизительно температуру воды в начале конденсации.

Чему равна суммарная работа пара при его нагревании после испарения и охлаждении до начала конденсации? Молярная теплоёмкость пара при постоянном объёме равна $c_V = 3R$.

Примечание. Учтите, что для малых изменений Δp и ΔV величин p и V справедлива приближённая формула $\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p$.

Подсказка

Для малых изменений запишите уравнение адиабаты в виде связи $\Delta T/T$ и $\Delta p/p$ и получите приблизительно прямую в координатах p, T ; затем найдите её пересечение с графиком давления насыщенных паров.

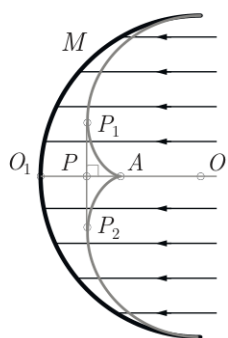
Ответ

$T_2 \approx 97,5^\circ\text{С}$; $A \approx 2,32 \text{ кДж}$.

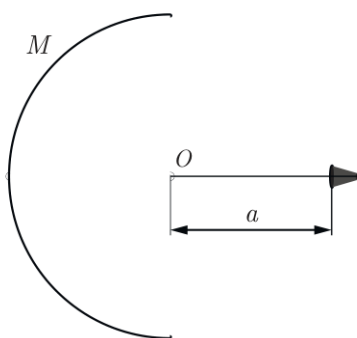
9 Каустики

Каустика — это огибающая семейства лучей, не пересекающихся в одной точке. В плоском случае, рассматриваемом в этой задаче, каустика — это кривая, которой касаются все лучи, отражающиеся от некоторой поверхности, или испытывающие преломление на некоторой границе раздела. Интенсивность света вблизи каустики возрастает, поэтому кривые каустик хорошо видны невооружённым глазом и на фотографиях.

1. Кривая серого цвета на рисунке — это каустика, образованная после отражения пучка параллельных лучей цилиндрической поверхностью M , радиус которой равен R . Определите расстояние от оси цилиндра т. O до вершины каустики — т. A , а также расстояние PA . OO_1 — ось симметрии, P_1P_2 — касательная к каустике. (5 баллов)
2. Источник, освещающий цилиндрическую поверхность радиусом R , располагается на расстоянии $a = 4R$ от т. O на оси симметрии системы OO_1 . Определите расстояние от т. O до вершины каустики, формируемой отражёнными лучами в этом случае. (4 балла)

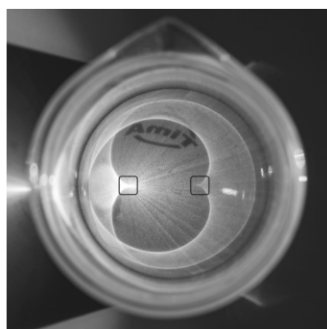


К п. 1

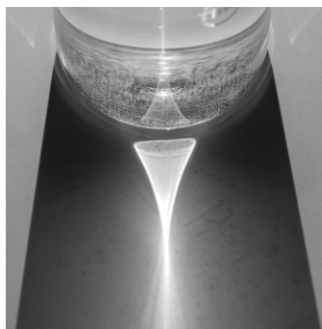


К п. 2

В тонкостенный стеклянный цилиндрический стакан наливают воду и освещают светом фонаря. Ось пучка света составляет разные углы α с горизонтальной поверхностью стола в п. 3 и п. 4. В п. 3 стакан фотографируют сверху (оптическая ось объектива перпендикулярна дну стакана), а освещают справа. В п. 4 ось объектива немного отклоняется от перпендикуляра.



К п. 3



К п. 4

3. Величина угла α около 45° . Вблизи дна стакана наблюдается кривая с двумя вершинами, части которой напоминают кривую из п. 1. На рисунке вершины обведены квадратами. Объясните наблюдаемую картину. (3 балла)
4. Радиус основания стакана равен $R = 8$ см. Фонарь располагается на расстоянии $a \approx 10R$ от оси стакана. Угол α можно считать малым. Снаружи стакана видна каустика, образованная прошедшими через стакан лучами. Определите приближённо расстояние от стакана до вершины каустики (до вершины «конуса»). Показатель преломления воды равен $n \approx 1,33$. (6 баллов)

Подсказка

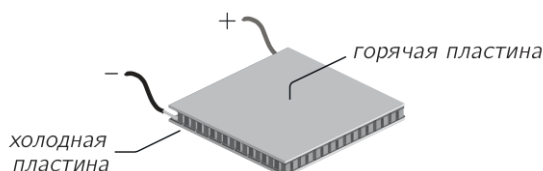
Лучи касаются каустики, а вблизи оси хорошо работает параксиальное приближение: отражение от вогнутого зеркала даёт фокус на расстоянии, которое для п. 2 можно найти по формуле зеркала, а в п. 4 стакан с водой нужно рассматривать как «толстую» линзу.

Ответ

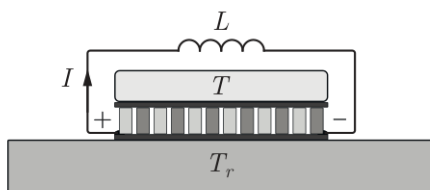
1) $AO = \frac{R}{2}$, $PA = R\left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$; 2) $OA = \frac{4R}{9}$; 3) наблюдаются две каустики отражённых лучей. Одна формируется лучами, однократно отразившимися от левой половины стакана. Другая формируется лучами, испытавшими отражение от левой и правой половин стакана; 4) $S = 1,5R = 12$ см.

10 Тепловой индуктор

Элемент Пельтье состоит из двух пластин, разделённых большим количеством полупроводниковых блоков (рис. из «Википедии» ниже), и представляет собой преобразователь электрической энергии в тепловую. Он также может работать и в обратном режиме — вырабатывать ЭДС при наличии разности температур на пластинах.



На втором рисунке схематично изображено устройство на основе элемента Пельтье. Нижняя пластина находится в контакте с «тепловым резервуаром» — большим телом, температуру которого T_r можно считать постоянной. Верхняя пластина контактирует с телом с теплоёмкостью C и температурой T , которая изменяется со временем. Сверхпроводящая катушка с индуктивностью L включена между контактами элемента. В начальный момент: $T = T_0$, $T_0 > T_r$.



В данных условиях верхнее тело отдаёт элементу за время Δt количество теплоты $\Delta Q = \alpha T I \Delta t$, где α — постоянный коэффициент, I — ток через элемент. Положительным направлением тока считается направление от «плюса» к «минусу». Элемент Пельтье при этом вырабатывает ЭДС, которая равна $\mathcal{E} = \alpha(T - T_r)$. Полярность создаваемой ЭДС (для $T > T_r$) совпадает с указанной на рисунке. Сопротивление элемента Пельтье равно R .

Оказывается, в рассматриваемой системе возможно периодическое изменение температуры тела $T(t)$ и тока в цепи $I(t)$. В задаче предлагается исследовать колебания тока и температуры при различных значениях параметров: T_r , T_0 , C , α , R , которые считаются известными. Ток в цепи в начальный момент равен нулю: $I(0) = 0$. Разность температур тела и резервуара можно считать малой: $|T - T_r| \ll T_r$ в любой момент времени.

1. Рассмотрим идеализированный, фантастический случай, когда сопротивление R равно нулю и теплообмен между тепловым резервуаром и телом за счёт теплопроводности отсутствует.

1а) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$. (2 балла)

1б) Преобразуйте полученное уравнение с учётом условия $|T - T_r| \ll T_r$ и найдите частоту ω_0 колебаний тока. (3 балла)

1с) Найдите зависимость температуры тела от времени $T(t)$. (1 балл)

2. Физически случай, описанный в п. 1, никогда не реализуется. Рассмотрим параметры системы, близкие к реальности. Пусть известно сопротивление элемента R , мощность передачи тепла от тела резервуару определяется соотношением $P = k(T - T_r)$, где k — известный коэффициент, а Джоулево тепло, выделяющееся в элементе, делится поровну между пластинами. В этом случае колебания будут затухающими.

2а) Получите дифференциальное уравнение для функции $I(t)$ в этом случае. (3 балла)

2б) Покажите, что нелинейными слагаемыми, пропорциональными I^2 и $I\dot{I}$, (точка сверху обозначает производную по времени) в уравнении из п. 2а) можно пренебречь и преобразуйте полученное уравнение к виду $\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = 0$ (уравнение затухающих колебаний). Чему равны коэффициенты γ и ω ? (4 балла)

2с) Полагая затухание слабым ($\gamma^2 \ll \omega^2$), определите относительное изменение амплитуды тока за период $\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}}$. Ответ выразите через коэффициенты γ и ω . (3 балла)

3. Предлагается создать на основе данного устройства установку для точного измерения теплоёмкости тел. Параметры: T_r, α, k, R, L известны. Их измерили раньше с высокой точностью. В распоряжении экспериментатора есть электроизмерительные приборы, осциллограф и генератор переменного напряжения, частоту которого можно менять в широком диапазоне. Опишите в двух словах возможную схему эксперимента. (2 балла)

Подсказка

Закон сохранения энергии для тела: изменение CT определяется теплом αTI , уходящим в элемент. Вторая связь — правило Кирхгофа для контура с катушкой: $L\dot{I} = \mathcal{E} - IR$.

Ответ

$$1) LC\ddot{I} + \alpha^2 T_r I + \alpha L\dot{I}I = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha^2 T_0}{CL}}; \quad T(t) = (T_0 - T_r) \cos \omega_0 t + T_r.$$

$$2) LC\ddot{I} + (RC + kL)\dot{I} + (kR + \alpha^2 T_r)I + \alpha L\dot{I}I + \alpha \frac{I^2 R}{2} = 0; \quad \gamma = \frac{R}{2L} + \frac{k}{2C}, \quad \omega = \sqrt{\frac{kR}{LC} + \frac{\alpha^2 T_r}{LC}};$$

$$\frac{\Delta I_{\max}}{I_{\max}} = 2\pi \frac{\gamma}{\omega^2}.$$

3) Следует поставить эксперимент, в котором можно было бы измерить частоту ω . Возможная схема эксперимента: в цепь включают генератор, а осциллограф подключают к катушке, измеряют резонансную частоту.