

МОШ, 2019/20, заключительный этап, 7 класс

[Условия, ответы и решения](#)

1 Про зайчика

Геша измерял плотность маленького стеклянного зайчика. Он налил воду в мензурку с ценой деления 2 мл, при этом столб воды доходил до отметки 170 мл. После того, как Геша полностью погрузил зайчика на ниточке в воду, уровень воды поднялся до 180 мл. Далее Геша решил взвесить зайчика на школьных рычажных весах для лабораторных работ. Но гири у него были только массой 2 г. Получилось, что 12 гирь мало, чтобы уравновесить зайчика, а 13 — много. Не долго думая, Геша вычислил плотность зайчика:

$$\rho = \frac{25 \text{ г}}{180 \text{ мл} - 170 \text{ мл}} = 2500 \text{ кг/м}^3.$$

Пришёл Лёлик, назвал Гешу неумным человеком и сказал, что на самом деле значение плотности зайчика может сильно отличаться от значения, вычисленного Гешей. Известно, что Лёлик оценивает погрешность измерения объёма мензуркой в половину цены деления.

Чему может быть равна плотность зайчика?

Подсказка

Масса и объём известны лишь в пределах интервала. Какие значения массы и объёма дают наименьшую и наибольшую плотность?

Ответ

$$2000 \text{ кг/м}^3 < \rho < 3250 \text{ кг/м}^3.$$

2 Переходы

Дядя Вова живёт в области, а работает в Москве, до которой едет на электричке. Путь от железнодорожной платформы до места работы составляет 400 метров. На этом пути дядя Вова преодолевает два пешеходных перехода длиной 20 метров, которые разделяет сорокаметровая маленькая площадь. Светофор на каждом переходе включает зелёный сигнал на 25 секунд, а красный — на две минуты. Дядя Вова ходит не спеша, со скоростью не более 1 м/с. Обозначим t_1 — минимальное время, за которое дядя Вова может прийти от вокзала до работы, а t_2 — минимальное время на обратную дорогу. Интервал времени между включением зелёного сигнала на первом светофоре на пути от вокзала и включением зелёного сигнала на втором обозначим T . Дядя Вова соблюдает правила, поэтому он выходит на «зебру» перехода только в том случае, если до окончания зелёного сигнала светофора остаётся 20 секунд и более. В противном случае он дорогу не переходит.

1. Пусть время T равно 60 с. Найдите время t_1 и время t_2 .
2. Чему равно время T , если $t_1 = t_2$?

Подсказка

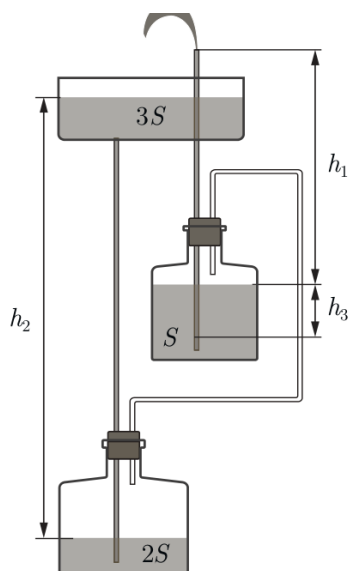
Период светофора 145 с, выйти на переход можно только в первые 5 с зелёного сигнала. Нарисуйте, в какие моменты можно войти на каждый переход при движении в каждую сторону.

Ответ

1) $t_1 = 400$ с, $t_2 = 420$ с; 2) $T = 0$, $T = 72,5$ с.

3 Фонтан Герона

На рисунке ниже изображена схема «Фонтана Герона». Три сосуда с вертикальными стенками, площади оснований которых указаны на рисунке ($S = 100 \text{ см}^2$), соединены системой трубок с площадью сечения $S_1 = 10 \text{ мм}^2$. Суммарный объём воздуха в нижних сосудах остаётся при работе фонтана постоянным.



Вся вода, выходящая из верхней трубки и образующая фонтан, в итоге оказывается в верхнем сосуде. Квадрат скорости воды v на выходе из трубки определяется выражением

$$v^2 = \alpha(h_2 - h_1),$$

где α — неизвестный коэффициент пропорциональности, расстояния h_1 и h_2 показаны на рисунке. В процессе работы фонтана расстояния h_1 , h_2 и h_3 меняются.

1. Как изменяется уровень воды в верхнем сосуде в процессе работы фонтана?

В некоторый момент времени указанные на рисунке расстояния равны: $h_1 = 35$ см, $h_2 = 60$ см, а скорость воды, бьющей из трубочки, равна $v = 2,0$ м/с.

2. Найдите скорости изменения уровней воды в нижних сосудах в этот момент времени.

3. По истечении некоторого времени уровень воды в среднем сосуде опустится на величину $h_3 = 6$ см, при этом нижний сосуд ещё не заполнится. Чему равна в этот момент скорость воды на выходе из трубки?

Подсказка

Вода из нижних сосудов вытесняется воздухом и попадает наверх, а вся вода из фонтана возвращается в верхний сосуд. Что тогда происходит с уровнем в верхнем сосуде и как связаны $h_2 - h_1$ и h_3 ?

Ответ

1) уровень не изменяется; 2) 2 мм/с и 1 мм/с; 3) 1,6 м/с.

4 Мокрый песок

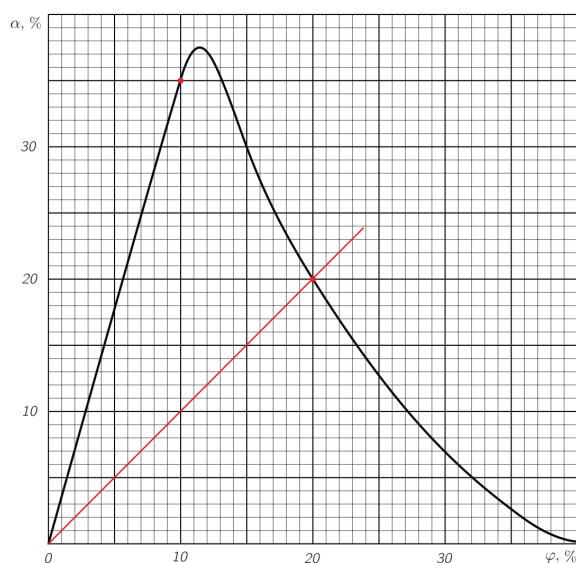
Строительный песок часто добывается со дна рек или карьеров. Такой песок содержит воду, что количественно характеризует влажность песка, равная

$$\varphi = \frac{m_{\text{вод}}}{m_{\text{п}}}.$$

$m_{\text{вод}}$ — масса воды (в мокром песке), $m_{\text{п}}$ — масса песка без воды. Объём влажного песка $V_{\text{вл}}$ сильно зависит от его влажности. Обозначим

$$\alpha = \frac{V_{\text{вл}} - V_{\text{сух}}}{V_{\text{сух}}},$$

относительное изменение объёма песка при его увлажнении. Приближённый график зависимости $\alpha(\varphi)$ приведён на рисунке. Значения влажности песка и относительного изменения объёма выражены в процентах.



1. Определите значение влажности, при которой плотность влажного песка равна плотности сухого.
2. Объём порции влажного песка складывается из объёма песчинок, объёма воды и объёма воздушных полостей: $V_{\text{вл}} = V_{\text{п}} + V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}$. Когда небольшое количество воды попадает в песок вода обволакивает песчинки за счёт капиллярных сил и отдаляет их друг от друга. Предположим, что объём воды в песке и объём воздушных полостей связаны соотношением $V_{\text{возд}} = k \cdot V_{\text{вод}} + V_{\text{возд}}^{(0)}$, $V_{\text{возд}}^{(0)}$ — объём воздушных полостей при нулевой влажности. Можно ли считать коэффициент пропорциональности k постоянным на всём возрастающем прямолинейном участке графика? Найдите значение коэффициента k в середине этого участка графика. Плотность сухого песка $\rho_{\text{сух}}$ в 1,6 раз больше плотности воды $\rho_{\text{вод}}$.

Подсказка

Масса влажного песка равна $m_{\text{п}}(1 + \varphi)$. Выразите α через φ и отношение плотностей; при равных плотностях получится простая связь между α и φ .

Ответ

1) $\varphi = 20\%$; 2) да, k постоянен на всём прямолинейном участке; $k \approx 1,19$.