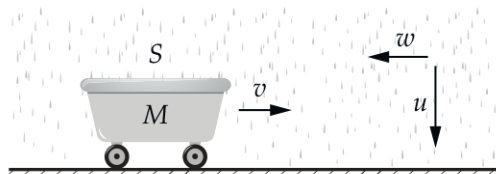


МОШ, 2020/21, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Таз на колёсиках

Тазик на колёсиках движется под дождём по горизонтальной дороге. Суммарная масса капель в единице объёма равна ρ , а их скорость вблизи поверхности земли равна u . Площадь верхнего горизонтального сечения тазика равна S . В нулевой момент ($t = 0$) таз пустой, его масса вместе с колёсами равна M , а скорость равна v_0 ($v_0 \ll u$). Далее везде силой трения качения и силой сопротивления воздуха можно пренебречь.



А. Пусть в дне таза есть небольшое отверстие. Дождевая вода, попадая в таз, стекает на дно, распределяется по нему тонким слоем и вытекает через отверстие. Можно считать, что масса воды в тазу пренебрежимо мала по сравнению с массой таза.

А1) Какое расстояние L_1 пройдёт таз до остановки, если капли падают вертикально?

А2) Подул встречный (для тазика) ветер, так что горизонтальная составляющая скорости капель вблизи земли оказалась равна w , а вертикальная — равна u . Какое расстояние L_2 пройдет тазик до остановки, если время движения равно t ?

В. В этой части задачи считается, что дырок в тазике нет, вся попадающая в таз дождевая вода остаётся в нём. За рассматриваемое время вода не заполняет таз целиком и не переливается через борт. Ветра нет, скорость капель вертикальна.

В1) Определите зависимость скорости таза от времени $v(t)$ в этом случае.

В2) Если таз проходит расстояние S к моменту, когда масса воды в нём становится равна массе таза M , то какое расстояние он пройдёт к моменту, когда масса воды в нём станет равна $3M$?

Подсказка

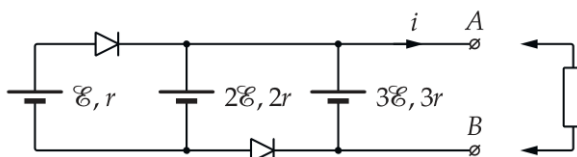
Таз получает от дождя массу, которая вначале неподвижна по горизонтали. Какая величина сохраняется в горизонтальном направлении, пока вода либо вытекает, либо остаётся в тазу?

Ответ

$$\text{А1) } L_1 = \frac{Mv_0}{\rho u S}; \quad \text{А2) } L_2 = \frac{Mv_0}{\rho u S} - wt; \quad \text{В1) } v(t) = \frac{Mv_0}{M + \rho u S t}; \quad \text{В2) } S_1 = 2S.$$

2 Изобразите характеристику

В схеме специального источника напряжения, показанной на рисунке, диоды — идеальные (открываются при близком к нулю напряжении), значения ЭДС и внутреннего сопротивления равны: $\mathcal{E} = 1,5$ В и $r = 1,0$ Ом соответственно.



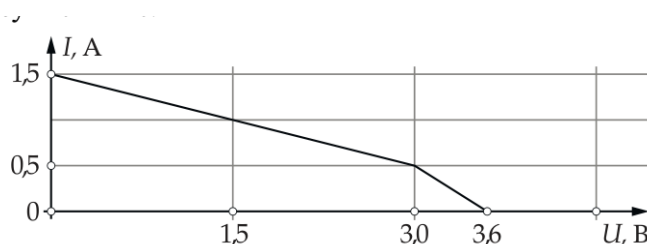
Изобразите графически зависимость $i(U)$ (ВАХ источника), где i — ток, возникающий при подключении к источнику нагрузки, а U — разность потенциалов выводов A и B : $U = \varphi_A - \varphi_B$.

Подсказка

Выясните, при каких напряжениях на выводах открыт каждый из диодов, и на каждом участке замените схему одной эквивалентной батареей.

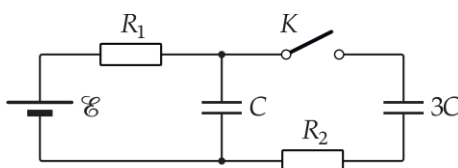
Ответ

График зависимости $I(U)$ — ломаная с одним изломом: из точки $(0; 1,5$ А) в точку $(3,0$ В; $0,5$ А), затем в точку $(3,6$ В; $0)$.



3 Токи через секунду

В схеме, показанной на рисунке, ключ K изначально разомкнут, конденсатор ёмкостью $C = 100$ мкФ заряжен, а конденсатор ёмкостью $3C$ не заряжен, ток в цепи равен нулю. Другие параметры схемы равны: $R_1 = 10$ МОм, $R_2 = 10$ Ом, $\mathcal{E} = 12$ В. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением проводов можно пренебречь.



Ключ замыкают. Определите токи i_1 и i_2 , текущие через резисторы R_1 и R_2 соответственно, через одну секунду после замыкания ключа.

Подсказка

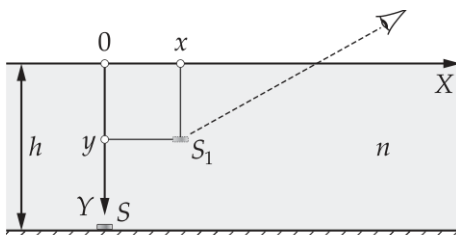
Сравните постоянные времени цепи: переходный процесс делится на быструю и медленную стадии. Что происходит с зарядами на конденсаторах в каждой из них?

Ответ

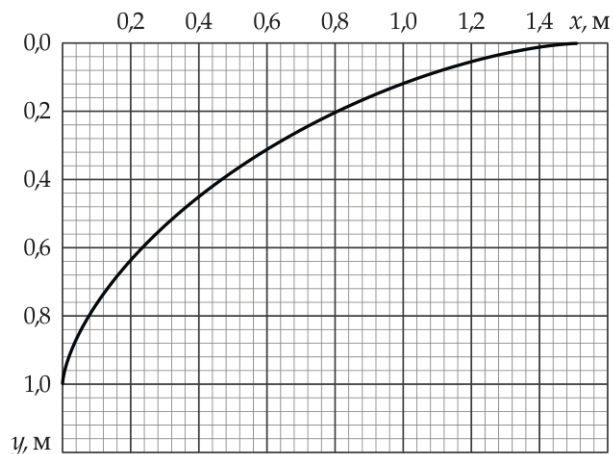
$i_1 \approx 0,9 \text{ мкА}$, $i_2 \approx 0,68 \text{ мкА}$.

4 Рассматривая монеточку

На дне сосуда глубиной h , заполненного жидкостью с показателем преломления n , в точке с координатами $(0, h)$ (направление осей показано на рисунке) располагается монеточка S .



Наблюдатель видит изображение монеточки S_1 в точке с координатами (x, y) . Множество значений (x, y) для разных углов зрения изображено на графике. Используя график, найдите показатель преломления жидкости n и глубину сосуда h .



Подсказка

Что видно на графике при $y = 0$ и при $x = 0$? Подумайте, под каким углом идёт в воде луч, выходящий вдоль поверхности жидкости.

Ответ

$n = 1,33 \pm 0,05$, $h = 1,34 \pm 0,05 \text{ м}$.

5 О капле

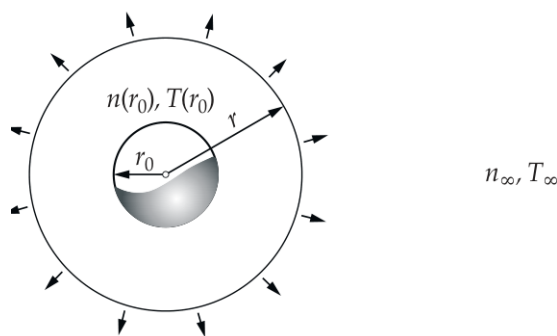
В этой задаче рассматривается эффект уменьшения температуры капли воды вследствие испарения с её поверхности при близких к комнатным давлению и температуре.

В одном из экспериментов шарообразная капля воды радиусом порядка миллиметра удерживалась силами поверхностного натяжения на тонкой полимерной леске. Зависимость температуры капли от времени измерялась с помощью высокоточного инфракрасного тепловизора. Вдали от капли (на «бесконечности») поддерживались постоянные значения: температуры T_∞ , давления p_∞ и относительной влажности воздуха φ_∞ . Обнаружилось, что если в начальный момент температура капли была равна температуре на бесконечности T_∞ , то затем в течение короткого времени она уменьшалась до значения $T_\infty - \Delta T$ (ΔT порядка нескольких градусов) и далее длительное время оставалась постоянной. Предлагается определить величину разности температур ΔT , учитывая диффузию пара от капли на бесконечность и тепловой поток, обусловленный разностью температур капли и воздуха на бесконечности. Конвекцией и передачей тепла по леске предлагается пренебречь.

В стационарном режиме в пространстве вне капли устанавливается распределение концентрации пара $n(r)$ и температуры $T(r)$. В силу сферической симметрии концентрация и температура зависят только от расстояния до центра капли r и удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dN}{dt} = -D \cdot 4\pi r^2 \frac{dn}{dr}, \quad \frac{dQ}{dt} = -\kappa \cdot 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}.$$

где dN — количество молекул пара, проходящих за время dt через поверхность сферы радиусом r , концентрической с каплей, dQ — количество тепла, переносимого за время dt через поверхность той же сферы; коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ можно считать постоянными. Маленькими стрелками на рисунке символически показан поток диффундирующих молекул пара.



А. Коэффициенты диффузии и теплопроводности D и κ , молярная масса $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$, удельная теплота испарения воды L и радиус капли r_0 считаются известными. Изменение радиуса капли вследствие испарения можно считать незначительным.

А1) Температура у поверхности капли $T(r_0)$ и температура на бесконечности T_∞ (см. рис.) известны. Определите тепловой поток $\frac{dQ}{dt}$ и распределение температуры $T(r)$.

А2) Известны концентрации пара: $n(r_0)$ и n_∞ , определите массу воды, испаряющейся с поверхности капли за малое время t .

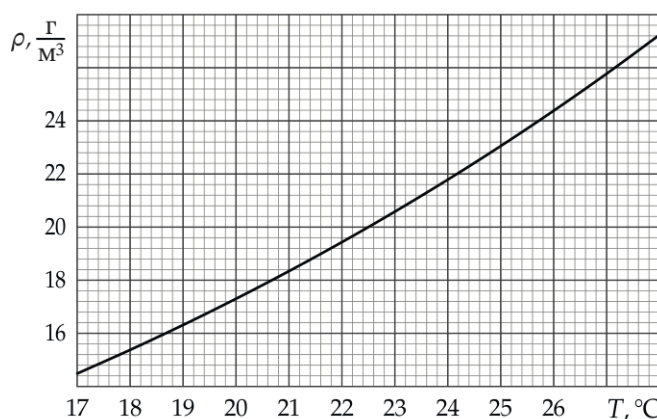
А3) Используя результаты пунктов А1) и А2), выразите разность плотностей пара у капли и на бесконечности $\Delta\rho = \rho(r_0) - \rho_\infty$ через разность температур $\Delta T = T_\infty - T(r_0)$.

В. Отношение коэффициентов теплопроводности и диффузии в условиях задачи удовлетворяет соотношению:

$$\frac{\kappa}{D} = \frac{v_{\text{B}}}{v_{\text{H}_2\text{O}}} \cdot \frac{c_V \rho_{\text{B}}}{\mu_{\text{B}}},$$

где $v_{\text{H}_2\text{O}}$ и $v_{\text{в}}$ — среднеквадратичные скорости молекул воды и воздуха, $c_V = 2,5R$ — молярная теплоёмкость воздуха при постоянном объёме, $\rho_{\text{в}}$ — плотность воздуха. Определите отношение коэффициентов при температуре 300 К. При расчёте плотности давление воздуха можно считать равным 10^5 Па. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8,3$ Дж/(моль·К), молярные массы воды и воздуха: $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 18$ г/моль и $\mu_{\text{в}} = 29$ г/моль соответственно. Убедитесь в том, что при изменении температуры на 10 К отношение коэффициентов меняется незначительно.

С. Используя график зависимости плотности насыщенного пара воды от температуры, приведённый на рисунке ниже, а также результаты, полученные в частях А и В, определите как можно точнее величину разности температур ΔT , для следующих значений параметров на бесконечности: $T_{\infty} = 27^\circ\text{C}$, $\varphi_{\infty} = 70\%$. Удельная теплота испарения воды и давление воздуха равны: $L = 2,4 \cdot 10^6$ Дж/кг и $p_0 = 10^5$ Па соответственно.



Примечание. При выполнении заданий части А может оказаться полезной формула:

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

Подсказка

В стационарном режиме оба потока (тепла и пара) одинаковы по любой сфере вокруг капли, поэтому $r^2 dT/dr$ и $r^2 dn/dr$ постоянны. Тепло, уходящее на испарение, должно приходить из воздуха.

Ответ

А1) $\frac{dQ}{dt} = -4\pi\kappa r_0 (T_{\infty} - T(r_0))$, $T(r) = T_{\infty} - (T_{\infty} - T(r_0)) \frac{r_0}{r}$; А2) $m = 4\pi D r_0 t (n(r_0) - n_{\infty}) \frac{\mu_{\text{H}_2\text{O}}}{N_A}$;
 А3) $\Delta\rho = \frac{\kappa}{LD} \Delta T$; В) $\frac{\kappa}{D} \approx 0,657 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{м}^3}$; С) $\Delta T = 5 \pm 0,5$ К.

6 Похоже на сплит-систему

Тепловая машина комнатной сплит-системы работает по обратному циклу Карно, при этом можно считать, что температура на «горячей» изотерме цикла равна температуре в комнате, а на «холодной» — температуре на улице. Летом, когда температура за окном равна $+27^\circ\text{C}$, сплит-система, работая в режиме кондиционирования (как холодильный агрегат), поддерживает в комнате температуру $+17^\circ\text{C}$ и потребляет от электросети среднюю мощность N_1 . В начале зимы, когда температура на улице опускается до -3°C , в сплит-системе включается режим теплового насоса, и она поддерживает в комнате ту же температуру $+17^\circ\text{C}$, что и летом,

потребляя среднюю мощность N_2 . Можно считать, что тепловой поток (через окна и стены) пропорционален разности температур в комнате и на улице с одинаковым коэффициентом пропорциональности летом и зимой. Найдите отношение мощностей $n = \frac{N_2}{N_1}$, потребляемых сплит-системой при работе в разных режимах.

Подсказка

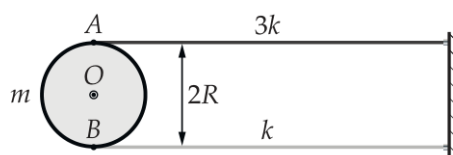
В стационарном состоянии тепло, пришедшее в комнату (или ушедшее из неё) через стены, равно теплу, которое переносит тепловая машина. Выразите её мощность через КПД обратного цикла Карно.

Ответ

$$\frac{N_2}{N_1} = 4.$$

7 Диск на резинках

Масса горизонтально расположенного диска, насаженного на вертикальную ось O (см. рисунок), равна m и равномерно распределена по границе диска — окружности радиусом R . В точках A и B , лежащих на одном диаметре закреплены резиновые нити жёсткостью k и $3k$, другие концы нитей присоединены к вертикальной стене. В положении равновесия отрезок AB располагается параллельно стене, нити не провисают, но и не деформированы, расстояние между ними равно $2R$.



А. Пусть диск может вращаться, не испытывая трения, вокруг оси. Определите период малых колебаний диска.

В. Ось вращается по часовой стрелке с достаточно большой постоянной угловой скоростью. Трение между осью и диском сухое. Максимальный момент сил трения, действующих на диск равен M_0 ($M_0 \ll kR^2$). Сначала диск удерживают в положении равновесия, потом отпускают.

В1) Через какое время после этого угловая скорость диска станет максимальной?

В2) Чему равна максимальная угловая скорость диска?

В3) Как изменится ответ, если диск будет вращаться против часовой стрелки?

Подсказка

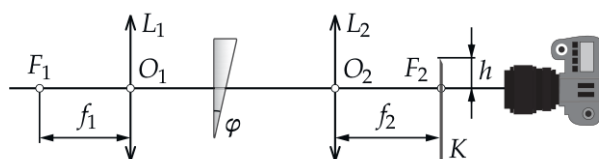
При малых поворотах нить с одной стороны растягивается, а с другой провисает, так что в каждую половину периода работает только одна из нитей. В части В момент трения постоянен, пока диск скользит по оси.

Ответ

$$\text{А) } T = \pi \left(\sqrt{\frac{m}{k}} + \sqrt{\frac{m}{3k}} \right); \quad \text{В1) } t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad \text{В2) } \omega_{\max}^{(1)} = \frac{M_0}{R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{km}}; \quad \text{В3) } t_2 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{3k}}, \omega_{\max}^{(2)} = \frac{M_0}{R^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3km}}.$$

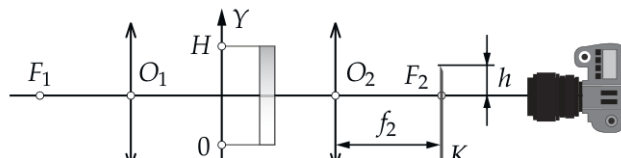
8 Шлирен-метод

Для наблюдения и фотографирования оптических неоднородностей в прозрачных средах часто применяют шлирен-метод (теневого метод), который может быть реализован по схеме, изображённой на рисунке. Две тонкие линзы L_1 и L_2 располагаются параллельно друг другу, так что их оптические оси совпадают. В фокусе одной линзы, в т. F_1 находится точечный источник света. В фокальной плоскости другой линзы (т. F_2) располагается нож Фуко — большой прямоугольный непрозрачный экран K с острой кромкой, которая выступает над уровнем оптической оси на небольшое расстояние h . Фокальная плоскость объектива фотоаппарата совпадает с фокальной плоскостью линзы L_2 .



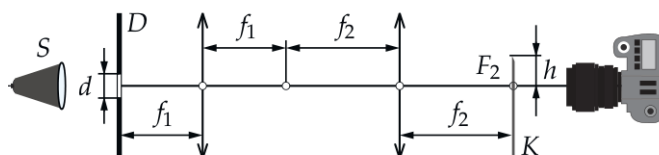
А. Пусть между линзами располагается (как показано на рисунке) призма с малым преломляющим углом φ и показателем преломления n . Фокусное расстояние линзы L_2 равно f_2 . При каких значениях h на фотографии ничего не будет видно?

В. Призму заменяют на плоско-параллельную пластинку (см. рис. ниже) толщиной d и высотой H ($d \ll H$), показатель преломления которой линейно зависит от координаты y : $n(y) = n_0 \left(1 + \frac{\alpha y}{H}\right)$, значения n_0 и α ($\alpha \ll 1$) считаются известными.



При каких значениях h в этом случае на фотографии ничего не будет видно?

С. Практически реализовать точечный источник света довольно трудно. Обычно на пути света, идущего от протяжённого источника S (рис. ниже) размещают диафрагму D — непрозрачный экран с маленьким отверстием диаметром d ($d \ll f_1, f_2$).



При каких значениях h на фотографии опять ничего не будет видно, если расстояние между линзами равно $f_1 + f_2$?

Подсказка

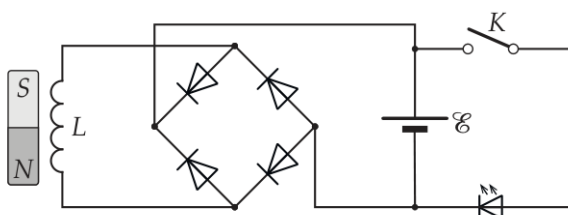
Параллельный пучок после линзы L_2 сходится в её фокальной плоскости. Луч, отклонённый на малый угол β , попадает в точку на расстоянии βf_2 от оси. Чтобы картинка была тёмной, все отклонённые лучи должны попасть на нож.

Ответ

А) $h > \varphi(n-1)f_2$; В) $h > \frac{\alpha n_0 d f_2}{H}$.

9 «Фонарь Фарадея»

В фонаре Фарадея аккумулятор заряжается благодаря подвижному магниту, периодически пролетающему через катушку индуктивности. Чтобы фонарь заряжался, его нужно трясти в руке, чтобы магнит быстро летал туда-сюда сквозь катушку. На рис. ниже показана упрощённая схема фонаря. ЭДС аккумулятора равна $\mathcal{E} = 3,6$ В. Катушка состоит из $n = 3000$ витков проволоки, её внутренний радиус чуть больше радиуса магнита, индуктивность и активное сопротивление равны: $L = 0,1$ Гн и $R = 50$ Ом соответственно. Диаметр цилиндрического магнита и его длина равны: $d = 15$ мм и $h = 23$ мм. Длина катушки равна длине магнита h .



Пусть фонарь трясут с частотой $\nu = 4$ Гц. Магнит движется в пластиковой трубке длиной $H = 12,3$ см. Для оценок, которые требуется сделать в этой задаче, предлагается считать, что магнит в трубке совершает гармонические колебания с амплитудой $0,5(H - h)$, диоды — идеальные, внутреннее сопротивление аккумулятора и проводов много меньше сопротивления катушки R .

А. Вычислите приближённо максимальную ЭДС индукции и максимальную ЭДС самоиндукции в катушке (по модулю). Найдите отношение этих величин. Убедитесь, что одна из них много больше другой.

В. Какое примерно число раз магнит должен пролететь сквозь катушку, чтобы в аккумуляторе накопилась энергия $E = 50$ Дж?

С. Определите приближённо отношение времени зарядки (тряски) ко времени работы без тряски, если потребляемая светодиодами от аккумулятора мощность равна $P = 0,5$ Вт.

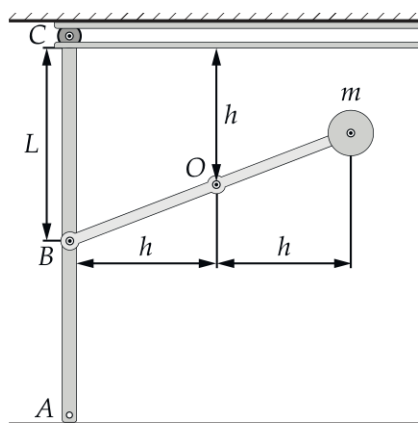
Подсказка

Оцените скорость магнита по гармоническому закону и поток, пронизывающий катушку при его пролёте. Сравните ЭДС индукции с ЭДС самоиндукции $L dI/dt$ при характерном токе.

10 Ворота

Механизм, при помощи которого производится подъём откидных ворот гаража, изображён на рисунке ниже, при этом ворота ABC находятся в вертикальном положении (закрыты). Прикладывая силу к ручке, расположенной у нижнего края ворот в т. A , можно перевести ворота в горизонтальное положение (открыть). При подъёме ворот ролик C , закреплённый на их верхнем крае, движется по горизонтальным направляющим. В т. B ($AB = BC = L$) ворота шарнирно соединены с коромыслом, которое может вращаться вокруг неподвижной оси O . На другом конце коромысла находится груз массой $m = 25$ кг. Ворота можно считать тонкой однородной пластиной массой $M = 30$ кг. Массой коромысла и ролика, любыми видами трения, а также

линейными размерами ролика и диска можно пренебречь. Размеры, указанные на рисунке, равны: $L = 92$ см, $h = 65$ см. В верхнем положении ворота фиксируются защёлкой.



А. А1) Какую силу F_1 , перпендикулярную воротам, необходимо прикладывать к ручке, чтобы удерживать ворота неподвижно при горизонтальном положении коромысла?

А2) Какую минимальную (!) силу F_2 необходимо прикладывать к ручке, чтобы ворота оставались неподвижными при горизонтальном положении коромысла?

В. Пусть при очень медленном подъёме ворот из начального вертикального положения в конечное горизонтальное к ручке в каждый момент времени прикладывается минимальная необходимая для подъёма сила. Чему равно максимальное значение $F_{\max}$ этой минимальной силы? Иначе говоря, каких минимальных мускульных усилий потребует от человека подъём ворот?

С. Если в верхнем положении открыть защёлку, то ворота начнут двигаться вниз, а коромысло — поворачиваться. Определите скорость груза в момент, когда ворота коснутся земли.

Подсказка

Для частей А и В удобно применить принцип виртуальных перемещений: сравните работу силы на ручке с изменением потенциальной энергии ворот и груза. В части С используйте закон сохранения энергии и связь скоростей точек системы.

Ответ

$$\text{А1) } F_1 \approx \frac{\sqrt{2}(M - m)g}{3} \approx 23,6 \text{ Н; } \quad \text{А2) } F_2 \approx \frac{(M - m)g}{\sqrt{5}} \approx 22,4 \text{ Н; } \quad \text{В) } F_{\max} = \frac{(M - m)g}{2} = 25 \text{ Н.}$$