

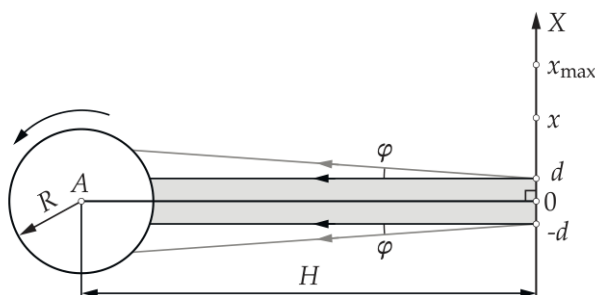
МОШ, 2020/21, заключительный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Дisko-шар

Диско-шар — это шар с зеркальной поверхностью, состоящей из сотен или тысяч граней, каждая из которых — маленькое плоское зеркало. Обычно он подвешивается на потолке к устройству, которое равномерно вращает его вокруг вертикальной оси. Когда шар освещается прожекторами, зрители видят многочисленные отблески («зайчики»), бегущие по полу, стенам и потолку помещения (фото ниже). Зеркальные шары приобрели популярность в период расцвета музыкального стиля диско, в конце 70-х годов 20 века, когда их стали устанавливать в залах дискотек и ночных клубов.

Пусть шар радиусом R вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр (т. A , рис. ниже, вид сверху), совершая n оборотов в секунду. Расстояние от центра шара до вертикальной стены, совпадающей с горизонтальной осью OX на рисунке, равно H , при этом $H \gg R$. Шар освещается пучком параллельных лучей, который формируется прожектором, расположенным на стене на той же высоте, что и центр шара. Лучи света от прожектора идут перпендикулярно стене, поперечный размер пучка равен $2d$.



Рассмотрим «зайчики», бегущие по стене на той же высоте, что и прожектор.

1. Чему равно максимальное значение координаты зайчика $x_{\max}$?
2. Определите скорость $v(x)$ движения «зайчика», проходящего точку с координатой x .
3. Пусть одинаковые маленькие плоские зеркала, покрывающие поверхность шара, имеют форму квадратиков с длиной стороны a ($a \ll R$). Пусть пучок света прожектора, падающий на шар, имеет небольшую расходимость (рис. выше), определяемую углом 2φ ($\varphi \ll 1$, см. Указание). Оцените максимальное значение угла φ , при котором хотя бы в некоторых точках стены можно будет различить отдельные «зайчики».

Указание. При решении задач 1 и 5 могут оказаться полезными следующие приближённые соотношения для тригонометрических функций малых углов α ($\alpha \ll 1$, $[\alpha] = \text{рад}$): $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\text{tg } \alpha \approx \alpha$.

Подсказка

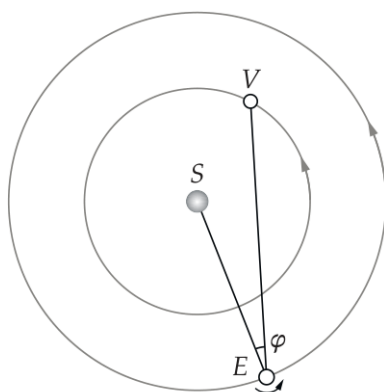
Зеркальце, повернувшееся на угол β , поворачивает отражённый луч на 2β . Крайний луч пучка падает на шар под углом, синус которого равен d/R ; скорость зайчика связана со скоростью поворота луча и расстоянием до стены.

Ответ

1) $x_{\max} = 2dH \frac{\sqrt{R^2 - d^2}}{R^2 - 2d^2} \approx \frac{2dH}{R}$; 2) $v(x) = 4\pi Hn \left(1 + \frac{x^2}{H^2}\right) \approx 4\pi Hn$; 3) в формулировке части С допущена ошибка (см. критерии организаторов: за часть С всем, приступившим к решению, засчитывается 2 балла, а вся задача оценивается в 8 баллов).

2 Элонгация Венеры

Наблюдениям за планетой Венера с Земли мешает её близость на небе к Солнцу. Угол φ (см. рис.) между направлениями с Земли (E) на планету, в данном случае на Венеру (V), и на Солнце (S) называется *элонгацией*; она бывает восточной и западной в зависимости от расположения планеты на небесной сфере относительно Солнца. Венеру в наибольшей западной элонгации можно наблюдать перед рассветом, а в наибольшей восточной — сразу после заката Солнца. Считается, что планета располагается западнее Солнца, если она появляется на небе раньше него.



альшее значение элонгации составляет

Наибольшее значение элонгации составляет около $46,5^\circ$, последний раз близкие значения наблюдались с 11 по 14 августа 2020 года, причем Венера была видна на рассвете. Орбиты Земли и Венеры можно считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Все планеты вращаются вокруг Солнца в одном направлении, Земля вращается вокруг своей оси в ту же сторону. Отклонение земной оси от перпендикуляра к плоскости вращения планет в данной задаче несущественно.

1. Найдите расстояние от Венеры до Солнца, если расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км.
2. Когда примерно можно ожидать следующий наиболее подходящий для наблюдения Венеры момент?

Подсказка

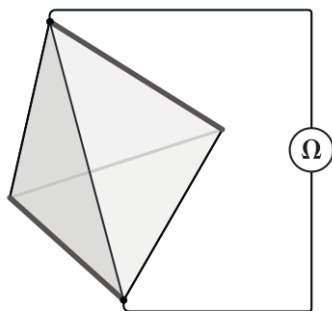
В момент наибольшей элонгации луч зрения с Земли касается орбиты Венеры, то есть угол SVE прямой. Для второго пункта сравните периоды обращения планет и найдите, через какое время Земля и Венера снова окажутся в нужной конфигурации.

Ответ

1) $R_V \approx 109$ млн км; 2) около 5 ноября 2021 года.

3 Тетраэдр

Правильный тетраэдр сделан из непроводящего материала. Его поверхность покрыта тонкой фольгой толщины h , много меньшей размеров рёбер. Удельное сопротивление материала фольги равно ρ .



→ соприкасающимся рёбрам в

К двум не соприкасающимся рёбрам вдоль всей их длины припаяли медные проволочки пренебрежимо малого сопротивления (линии увеличенной толщины на рис. выше), к которым подключили омметр. Какую величину сопротивления показывает прибор?

Подсказка

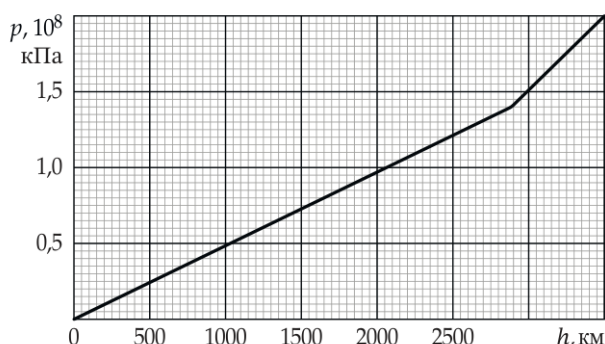
Грани тетраэдра можно мысленно «развернуть» или перегруппировать так, чтобы получились простые проводящие полосы; воспользуйтесь симметрией и формулой $R = \rho L/S$.

Ответ

$$R = \rho \frac{h}{2da} = \frac{\rho\sqrt{3}}{4d} \text{ (в обозначениях организаторов).}$$

4 Плотность мантии

По существующим представлениям о строении Земли под слоем земной коры небольшой толщины находится мантия, состоящая из силикатных пород и простирающаяся примерно до глубины 2900 км, мантия окружает жидкое внешнее ядро. С небольших глубин из-за высоких давлений твёрдое вещество мантии начинает проявлять пластические свойства, поэтому при расчётах можно считать его жидким. На основе анализа данных о скоростях распространения сейсмических волн возникли модельные представления о распределении давления внутри Земли. В первом приближении график зависимости давления p от глубины h (при $h \lesssim 3500$ км) состоит из двух линейных участков (рис. ниже), при этом гравитационная сила, действующая на тело массой m со стороны Земли на глубинах до 3000 км, определяется по той же формуле, что и на поверхности: $F = mg$. Можно считать, что ускорение свободного падения равно $g = 10 \text{ м/с}^2$.



Изобразите графически зависимость плотности вещества Земли от глубины, соответствующую участку прямой пропорциональности на графике давления. На сколько изменяется плотность в точке излома графика давления?

Подсказка

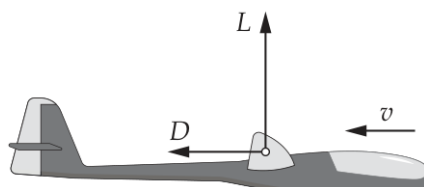
В жидкости $p = \rho gh$, поэтому наклон линейного участка графика $p(h)$ даёт плотность: $\rho = (\Delta p / \Delta h) / g$. На изломе плотность скачком меняется вместе с наклоном.

Ответ

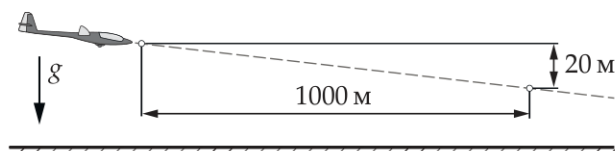
$\rho = 4830 \text{ кг/м}^3 \pm 50 \text{ кг/м}^3$ (постоянна на участке прямой пропорциональности); $\Delta \rho = 5200 \text{ кг/м}^3 \pm 100 \text{ кг/м}^3$.

5 Планирование

На крыло летательного аппарата со стороны натекающего на него потока воздуха, движущегося со скоростью v (относительно крыла), действуют силы, зависящие от скорости v : подъёмная сила $L(v)$, ортогональная скорости, и сила сопротивления $D(v)$, сонаправленная скорости (см. рисунок). Отношение $K(v) = L(v)/D(v)$ называется *аэродинамическим качеством*. В этой задаче рассматривается полёт планера (безмоторного летательного аппарата), для которого аэродинамическое качество можно считать постоянным, не зависящим от направления и величины скорости v .



Известно, что в неподвижном (относительно земли) воздухе планер может лететь, снижаясь, с постоянной скоростью, так что уменьшение высоты будет составлять 20 метров на каждый километр перемещения по горизонтали (рис. ниже).



Тот же планер может лететь, не снижаясь, со скоростью $w = 20$ м/с относительно земли во встречном восходящем потоке воздуха, скорость которого относительно земли равна $u = 5$ м/с и направлена под малым углом α к горизонтали (см. Указание). Найдите значение угла α .

Указание. При решении задач 1 и 5 могут оказаться полезными следующие приближённые соотношения для тригонометрических функций малых углов α ($\alpha \ll 1$, $[\alpha] = \text{рад}$): $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, $\text{tg } \alpha \approx \alpha$.

Подсказка

Сила воздуха на планер определяется скоростью потока относительно крыла; в обоих режимах полёта направление силы и угол к потоку одинаковы. Сравните «треугольники скоростей».

Ответ

$$\alpha = \frac{u + w}{u} \cdot \varphi = 0,1 \text{ рад.}$$