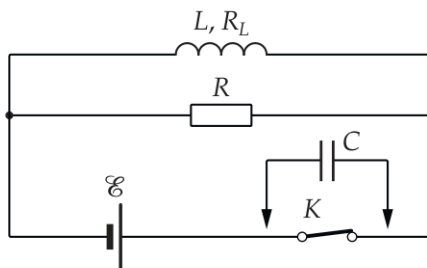


МОШ, 2021/22, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Явления при размыкании

В цепях с большой индуктивной нагрузкой ключ часто шунтируют конденсатором (подключают его параллельно ключу), подобно тому как это схематично показано на рисунке ниже. Предлагается рассмотреть две цепи, собранные по схеме, показанной на рисунке: в первой ключ шунтирован, а во второй — нет. В обеих цепях изначально ключ замкнут, токи установились. Численные значения параметров цепей следующие: $\mathcal{E} = 10$ В, $R = 100$ Ом, $R_L = 10$ Ом (сопротивление провода, которым намотана катушка), $L = 0,1$ Гн, $C = 1$ мкФ. Внутренним сопротивлением батареи можно пренебречь.



1. (2 б.) Определите отношение $\frac{U_1}{U_2}$ напряжений на резисторе сразу после размыкания ключа в первой и второй цепи.
2. (4 б.) Найдите количество теплоты Q_1 , выделяющееся после размыкания ключа в первой цепи, и количество теплоты Q_2 , которое выделяется на резисторе R после размыкания ключа во второй цепи.

Подсказка

Ток через катушку не может измениться скачком. Куда он потечёт сразу после размыкания в каждой из цепей и какую энергию запаса катушка до размыкания?

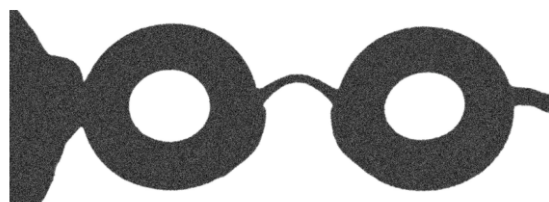
Ответ

$$1) \frac{U_1}{U_2} = \frac{R_L}{R} = 0,1; \quad 2) Q_1 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \left(1 + \frac{CR^2}{L}\right) \approx 5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}, \quad Q_2 = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R_L^2} \cdot \frac{R}{R + R_L} \approx 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ Дж}.$$

2 Очки составителя

Один из составителей заданий олимпиады носит очки в очень тонкой оправе, оптическая сила линз которых равна +2 дптр. Если эти очки снять с составителя и расположить их под светодиодной лампочкой, закреплённой на потолке комнаты, так, чтобы плоскости линз были параллельны полу, то на полу можно будет наблюдать резкую тень от оправы и линз, а также две ярко освещённые области в центрах теней линз (см. обработанный фрагмент фотографии ниже).

на фотографии ниже).



Считая лампочку точечным источником света, определите, на каком расстоянии от пола следует держать очки, чтобы диаметр светлого пятна в середине тени одной из линз был примерно в два раза меньше диаметра тени линзы. Высота потолка в комнате равна 3 м. Считайте, что линия, соединяющая лампочку и оптический центр линзы, перпендикулярна полу. Учтите, что искомое расстояние не должно быть больше 1 м.

Подсказка

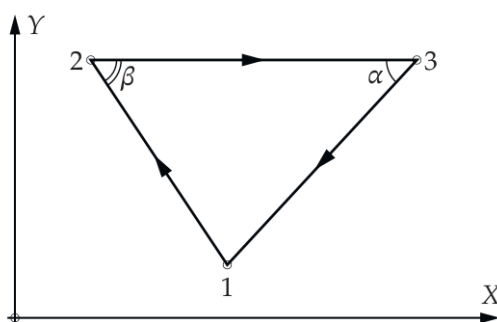
Светлое пятно — это свет, прошедший через линзу. Постройте изображение лампочки в линзе и посмотрите, как расходится пучок за изображением и каково сечение пучка на уровне пола.

Ответ

27,5 см.

3 Расчёт цикла

С одним молем идеального газа, молярная теплоёмкость которого при постоянном объёме c_V равна $2R$, где R — универсальная газовая постоянная, проводится циклический процесс 1231, график которого в логарифмических координатах ($x = \ln \frac{V}{V_0}$, $y = \ln \frac{p}{p_0}$, где p_0 и V_0 — некоторые неизвестные постоянные) имеет форму треугольника с углами $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\beta = \arctg\left(\frac{3}{2}\right)$ (см. рисунок ниже). Отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе равно n .



1. (4 б.) Считая известной температуру T_1 в точке 1, найдите температуры T_2 и T_3 в точках 2 и 3.
2. (4 б.) Определите КПД η цикла.

Подсказка

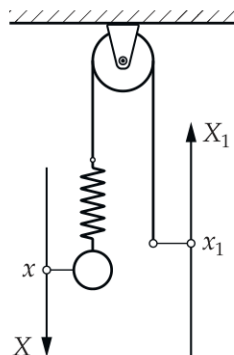
Прямая в координатах $\ln V$, $\ln p$ означает степенную связь $p \propto V^k$. Выясните, какие это процессы (в частности, чему равен показатель на участке 12 по сравнению с показателем адиабаты) и на каких участках газ получает или отдаёт тепло.

Ответ

$$1) T_2 = T_1 n^{1/3}, T_3 = T_1 n^2; \quad 2) \eta = 1 - \frac{5(n^2 - 1)}{6(n^2 - n^{1/3})}.$$

4 Вынуждают колебаться!

К одному концу невесомой нити, перекинутой через идеальный блок, присоединён пружинный маятник, состоящий из лёгкой пружины с тяжёлым шариком. Собственная частота колебаний маятника (в отсутствие затухания) равна ω_0 . На другой конец нити действует такая внешняя сила, что начиная с нулевого момента времени его координата по вертикали меняется по закону $x_1(t) = A \sin(\Omega t)$ (см. рисунок). В нулевой момент времени маятник находится в положении равновесия и не движется. В обеих частях задачи считается, что нить при колебаниях ни в один из моментов времени не провисает. Шарик движется только по вертикали и не раскачивается.



1. (4 б.) В этой части предлагается пренебречь всеми силами сопротивления. Тогда движение шарика будет представлять собой суперпозицию колебаний с частотами Ω и ω_0 :

$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t + \varphi) + C_2 \sin(\Omega t),$$

где $x(t)$ — отклонение шарика от положения равновесия (см. рисунок), C_1 , C_2 , φ — неизвестные постоянные. Определите максимально возможное отклонение шарика от положения равновесия в следующих случаях: A1) (2 б.) $\Omega \gg \omega_0$; A2) (2 б.) $\Omega \ll \omega_0$.

2. (6 б.) В этой части предлагается учесть слабое затухание колебаний маятника. Предположим, что затухание обусловлено силой, пропорциональной скорости шарика и направленной против скорости. Тогда через некоторое время после начала процесса координата шарика будет изменяться периодически по гармоническому закону с частотой Ω . Однако колебания шарика будут сдвинуты по фазе относительно колебаний конца нити, к которому прикладывается внешняя сила, на φ :

$$x(t) = C \sin(\Omega t + \varphi).$$

Определите абсолютное значение сдвига фаз φ при следующих значениях частоты Ω : B1) (4 б.) $\Omega \gg \omega_0$, $\Omega \ll \omega_0$; B2) (2 б.) $\Omega = \omega_0$.

Подсказка

Движение верхнего конца пружины — внешнее воздействие: сила, действующая на шарик, пропорциональна смещению $x_1 - x$ конца относительно шарика. Запишите уравнение вынужденных колебаний и рассмотрите предельные случаи по частоте.

Ответ

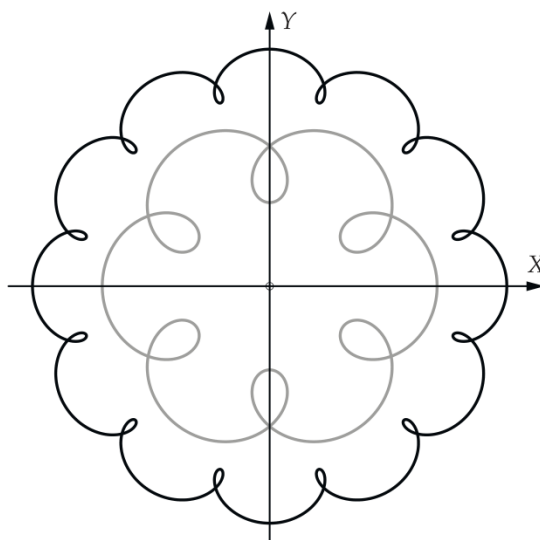
A1) $x_{\max} = A \frac{\omega_0}{\Omega} \approx 0$ при $\Omega \gg \omega_0$; A2) $x_{\max} = A \left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0}\right) \approx A$ при $\Omega \ll \omega_0$. B1) π и 0; B2) $\frac{\pi}{2}$.

5 Ловушка Пеннинга

Ловушкой Пеннинга называется один из типов ионных ловушек — устройств, используемых в экспериментах по ядерной физике для удержания заряженных частиц и ядер в некоторой ограниченной области пространства в течение длительного (по меркам микромира) времени. В этой ловушке мощным электромагнитом создаётся однородное магнитное поле B , которое можно считать направленным против оси OZ системы координат с началом в центре ловушки ($B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = -B$), кроме того, системой металлических электродов создаётся электрическое поле с потенциалом

$$\varphi(x, y, z) = \frac{U_0}{2r_0^2} (-a(x^2 + y^2) + bz^2),$$

где U_0 и r_0 — известные постоянные, a и b — неизвестные безразмерные константы, причём $a > 0$. Оказывается, в полях такого вида положительно заряженная частица движется сложным образом. Вдоль оси OZ частица совершает гармонические колебания с некоторой частотой Ω_z около начала координат. Проекция траектории частицы на плоскость XOY представляет собой *эпитрохоиду*. Это линия, которую описывает точка, движущаяся по окружности радиуса r с постоянной угловой скоростью $\omega^{(+)}$, при том что центр этой окружности движется по окружности большего радиуса R ($R > r$) с меньшей угловой скоростью $\omega^{(-)}$. Здесь и далее имеются в виду угловые скорости относительно лабораторной (!) системы отсчёта. Примеры эпитрохонид, для которых центр большей окружности находится в начале координат, можно видеть на рисунке ниже.



Далее везде речь идёт о движении частицы с известными массой m и положительным зарядом q . Параметры U_0 , r_0 и B также считаются известными во всех частях задачи, кроме части С.

1. (4 б.) Получите формулы для проекций E_x , E_y и E_z вектора напряжённости электрического поля на оси системы координат и найдите отношение $\frac{b}{a}$ безразмерных коэффициентов b и a в выражении для потенциала электростатического поля.

Внимание! Если вы не получили в части А отношение $\frac{b}{a}$, можете приступить к решению части С, считая это отношение известным параметром.

2. (2 б.) Пусть задан коэффициент b . Определите частоту колебаний Ω_z , а также циклотронную частоту Ω_0 вращения частицы в магнитном поле при отсутствии электрического.
3. (6 б.) Выразите угловые скорости вращения частицы $\omega^{(+)}$ и $\omega^{(-)}$ по окружностям, дающим траекторию в виде эпитрохоиды, через параметры Ω_z и Ω_0 ($\sqrt{2}\Omega_z < \Omega_0$); $\omega^{(+)}$ — угловая скорость движения по окружности радиусом r , $\omega^{(-)}$ — угловая скорость вращения центра этой окружности. Радиусы окружностей r и R неизвестны. На рисунке выше ось OZ направлена на читателя, движение по обеим окружностям происходит в направлении против часовой стрелки.
4. (2 б.) Для траектории в виде бóльшей эпитрохоиды на рисунке выше (линия чёрного цвета), используя результаты предыдущих частей, определите безразмерные коэффициенты a и b в выражении для потенциала электростатического поля.

Подсказка

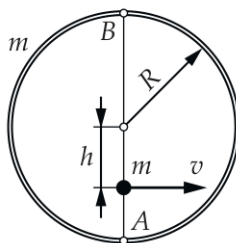
Для отношения b/a вспомните, что в области без зарядов потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа. В части С запишите уравнения движения в плоскости XOY для комплексной координаты $x + iy$ и ищите решения вида $e^{i\omega t}$.

Ответ

A) $E_x = \frac{aU_0x}{r_0^2}, E_y = \frac{aU_0y}{r_0^2}, E_z = -\frac{bU_0z}{r_0^2}; \frac{b}{a} = 2$. B) $\Omega_z = \sqrt{\frac{qbU_0}{mr_0^2}}, \Omega_0 = \frac{qB}{m}$. C) $\omega^{(\pm)} = \frac{\Omega_0 \pm \sqrt{\Omega_0^2 - 2\Omega_z^2}}{2}$.
 D) $b = 2a = \frac{13}{98} \cdot \frac{qB^2r_0^2}{mU_0}$.

6 Бильярд на льду

На ровную горизонтальную поверхность ледяного катка положили однородный тонкий обруч радиусом R и массой m . В точку, лежащую на диаметре обруча AB , на неизвестном расстоянии h от центра обруча поместили шайбу массой m и сообщили ей скорость v , направленную перпендикулярно AB . Взаимодействие между шайбой и обручем абсолютно упругое. После столкновения с обручем шайба и обруч движутся так, что в следующий раз шайба попадает в точку B обруча. Радиус шайбы пренебрежимо мал, трения нет, обруч можно считать абсолютно твёрдым телом. Определите расстояние h .



Подсказка

Удар происходит вдоль радиуса, так что обруч получает импульс вдоль радиуса и не раскручивается. Запишите законы сохранения импульса и энергии и найдите скорость шайбы относительно обруча.

Ответ

$$h = \frac{R}{2}.$$

7 Треугольники на тетраэдре

На грани правильного тетраэдра, изготовленного из пенопласта (диэлектрическая проницаемость равна 1), наклеены одинаковые тонкие металлические пластины в форме правильных треугольников, почти совпадающие по размерам с гранями тетраэдра. Электрического контакта между пластинами нет. Заряд любой пластины изначально равен нулю. Если одной пластине сообщить заряд Q , то её потенциал будет равен $\frac{Q}{C_0}$. Если теперь заземлить любую незаряженную пластину, то потенциал заряженной окажется равен $\frac{Q}{C_1}$. Найдите разность потенциалов двух пластин, если на одну из них нанесён заряд Q , а заряд второй равен $-Q$, при условии, что другие две пластины не заряжены. Чему равна ёмкость конденсатора, одной обкладкой которого является любая пластина тетраэдра, а другой — три оставшиеся пластины, соединённые друг с другом идеальным проводником?

Подсказка

Из симметрии потенциал любой пластины линейно выражается через заряды всех четырёх пластин с двумя коэффициентами: «собственным» и «взаимным». Два условия из задачи позволяют найти оба.

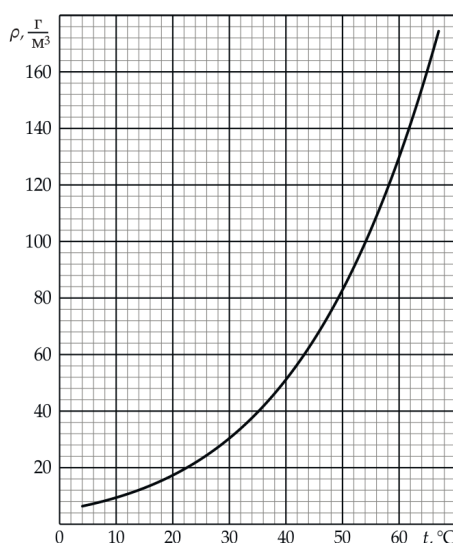
Ответ

$$\Delta\varphi = \frac{2Q}{C_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}} \right); \quad C = \frac{3}{4} \cdot \frac{C_0}{1 - \sqrt{1 - \frac{C_0}{C_1}}}.$$

8 В сосуде

В невесомости в высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания $0,05 \text{ м}^2$ находится вода массой m в жидком состоянии и влажный воздух, давление которого в любой точке сосуда равно внешнему давлению $p_0 = 10^5 \text{ Па}$, а температура равна температуре воды и равна $t = 65^\circ\text{С}$. Сосуд открыт сверху, поэтому относительная влажность воздуха в сосуде вследствие диффузии меняется линейно в зависимости от расстояния x до его дна, покрытого водой. Можно считать, что вблизи дна влажность равна 100 %, а на расстоянии $H = 1 \text{ м}$ от дна она уменьшается до 20 %. График зависимости плотности насыщенных паров воды от температуры показан на приведённом ниже рисунке.

Молярные массы сухого воздуха и воды равны 29 г/моль и 18 г/моль соответственно. Универсальная газовая постоянная равна $R = 8,3 \text{ Дж/(моль}\cdot\text{К)}$.



1. (4 балла) Пусть в начальный момент масса воды в жидком состоянии равна $m_1 = 32 \text{ г}$. Сосуд герметизируют, устанавливая специальную тонкую жёсткую задвижку на высоте $H = 1 \text{ м}$. После этого температуру в сосуде медленно увеличивают до 100°С . Найдите давление в сосуде в конечном состоянии.
2. (5 баллов) В этом случае начальная масса жидкости в сосуде равна $m_2 = 1,2 \text{ г}$. На расстоянии H от дна сосуда устанавливают поршень, который может скользить без трения вдоль оси сосуда. После этого температуру в сосуде начинают медленно уменьшать. Найдите расстояние от дна сосуда до поршня при температуре 60°С и 10°С .

Подсказка

Найдите по линейному профилю влажности массу пара и массу сухого воздуха в сосуде в начальный момент. Затем проверьте, остаётся ли при новой температуре вода в жидком состоянии или всё испарилось, и пользуйтесь либо насыщением пара, либо уравнением состояния.

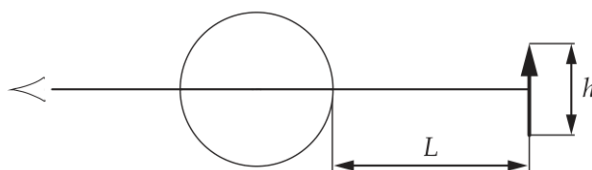
Ответ

- 1) $p_A = (193 \pm 8) \text{ кПа}$; 2) $H_1 = (1,01 \pm 0,015) \text{ м}$; $H_2 = (0,72 \pm 0,02) \text{ м}$.

9 Через шар

В этой задаче предлагается проанализировать изображения плоских предметов в прозрачном шаре радиусом R , изготовленном из стекла с показателем преломления $n = \frac{3}{2}$. Во всех частях задачи можно считать линию зрения перпендикулярной плоскости предмета, а центр шара — лежащим на линии зрения, как показано на схематичном рисунке ниже. Предлагается рассматривать только те изображения, которые формируются параксиальными (приосевыми) лучами.

Линейным увеличением β назовём отношение перпендикулярного линии зрения размера изображения h' к соответствующему размеру предмета h .



1. (4 балла) В шаре наблюдают изображение удалённого предмета размером h . Расстояние от шара до предмета равно L : $L \gg R$, $L \gg h$ (см. рисунок выше). Определите зависимость $\beta(L)$.
2. (6 баллов) Шар прислонили к поверхности экрана компьютерного монитора. С каким увеличением β можно видеть буквы (и отдельные пиксели) на экране в этом случае?



3. (4 балла) На приведённом выше фрагменте фотографии экрана компьютерного монитора, к которому прижат стеклянный шар, наблюдается увеличенное в шаре изображение пикселей.

Пусть шар радиусом $R = 2$ см прижали к экрану монитора и сфотографировали с расстояния $S = 1$ м, при этом центр шара находился вблизи оптической оси объектива, перпендикулярной плоскости экрана. Разрешение монитора составляло 2560×1440 пикселей, а длина диагонали экрана — 32 дюйма. Размеры светочувствительной матрицы фотоаппарата были равны $23,5 \times 15,6$ мм. Оказалось, что изображение в шаре горизонтального отрезка экрана из 20 пикселей занимает на фотографии чуть больше 100 точек при размере длинной стороны фотографии 3000 точек. Определите по этим данным фокусное расстояние F объектива фотоаппарата. Учтите, что $F \ll S$, 1 дюйм $\approx 2,54$ см.

Подсказка

Шар — две сферические преломляющие поверхности: изображение, построенное первой поверхностью, служит предметом для второй. Используйте формулу преломления на сферической поверхности в параксиальном приближении.

Ответ

- 1) $\beta = \frac{3R}{2L}$; 2) $\beta = 3$; 3) $F = (49 \pm 2)$ мм.

10 Аналогии

1. (7 баллов) В вакууме, в области, где нет зарядов и токов, электрическое и магнитное поля описываются одинаковыми с математической точки зрения дифференциальными уравнениями (с точностью до знаков и постоянных множителей), поэтому картины линий этих полей вдали от источников очень похожи. Например, напряжённость поля точечного электрического диполя ($\vec{p} = ql$ — дипольный момент) в точке с радиус-вектором $\vec{r}$ даётся формулой

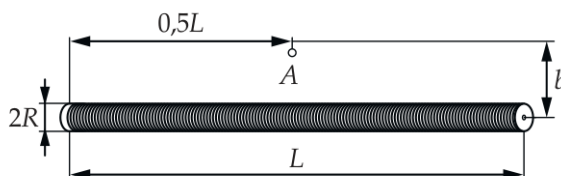
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right),$$

которая превращается в формулу для индукции магнитного поля витка с током (магнитного диполя) при замене: $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\mu_0}{4\pi}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$; $\vec{\mu} = IS\vec{n}$ — магнитный момент витка площадью S с током I , $\vec{n}$ — вектор единичной нормали к плоскости витка.

Рассмотрим соленоид с количеством витков N ($N \gg 1$) длиной L , намотанный достаточно тонким проводом виток к витку на полый цилиндрический немагнитный сердечник с радиусом основания R ($R \ll L$). По виткам соленоида течёт ток I .

A1) (2 балла) На большом расстоянии от витков соленоида его поле эквивалентно полю двух фиктивных магнитных зарядов, расположенных на торцах соленоида. Найдите модуль магнитного заряда Q_M любого из торцов соленоида.

A2) (3 балла) Чему равна индукция магнитного поля соленоида в точке A (см. рисунок) на расстоянии b ($b \gg R$, $b \ll L$) от его оси?



A3) (2 балла) Найдите индукцию магнитного поля соленоида в точке, лежащей вне соленоида на его оси на расстоянии h ($R \ll h \ll L$) от его торца.

2. (7 баллов) Аналогия можно развить, обратив внимание на то, что напряжённость вихревого электрического поля, порождаемого изменяющимся магнитным полем бесконечного соленоида, на расстоянии, много большем радиуса соленоида, описывается соотношением, очень похожим на формулу $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ для индукции магнитного поля прямолинейного провода с током I на расстоянии r от него.

B1) (1 балл) Найдите напряжённость вихревого электрического поля на расстоянии b от оси очень длинного цилиндрического соленоида радиусом a ($b > a$), магнитное поле в котором изменяется с известной скоростью $\frac{dB}{dt}$.

Тонкую цилиндрическую трубку с радиусом основания r и длиной $2\pi R$ ($R \gg r$) из немагнитного материала согнули в кольцо, на которое после намотали N ($N \gg 1$) витков тонкого провода виток к витку, так что получилась тороидальная катушка. Выводы катушки

подключили к специальному источнику напряжения, в итоге ток в катушке в зависимости от времени начал изменяться по закону $I(t) = kt$, где k — известная постоянная.

В2) (3 балла) Определите напряжённость вихревого электрического поля в центре тора.

В3) (3 балла) На главной оси тора на расстоянии h от него ($h \gg R$) располагается точечный заряд q . Какая сила действует на заряд со стороны вихревого электрического поля?

Подсказка

Фиктивный магнитный заряд торца найдите из условия, что диполь $Q_M L$ равен магнитному моменту соленоида. Для вихревого поля используйте замену тока на скорость изменения магнитного потока, а тор рассматривайте как виток с током в аналогии с дипольным полем.

Ответ

$$\begin{aligned} \text{A1)} \quad Q_M &= \frac{IN\pi R^2}{L}; \quad \text{A2)} \quad B_A = \mu_0 \frac{2INR^2}{L^3}; \quad \text{A3)} \quad B = \mu_0 \frac{INR^2}{4Lh^2}. \quad \text{B1)} \quad E = \frac{a^2}{2b} \cdot \frac{dB}{dt}; \quad \text{B2)} \quad E_0 = \mu_0 \frac{kNr^2}{4R^2}; \\ \text{B3)} \quad F(h) &= q \cdot \mu_0 \frac{kNr^2 R}{4h^3}. \end{aligned}$$