

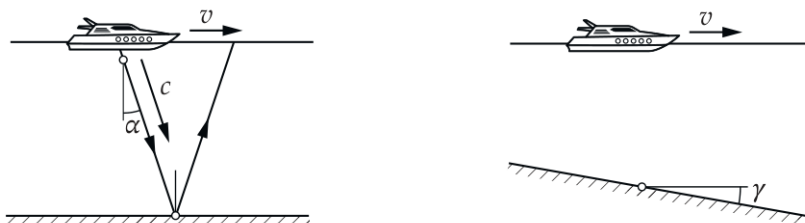
МОШ, 2022/23, отборочный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Ультразвуковые лучи

С катера, движущегося со скоростью $v = 15$ м/с, исследуют морское дно при помощи эхолота, посылая ультразвуковые сигналы в направлении дна под углом α к вертикали, и принимая отражённые сигналы. Ультразвуковые лучи отражаются от дна так же как световые от зеркала: угол падения равен углу отражения. Скорость c ультразвука в воде равна 1500 м/с и не зависит от скорости источника.

В ответе на вопрос любого пункта задачи следует указывать номер столбца таблицы, в котором стоит значение, наиболее близкое к найденному вами.



1. (2 балла) Если плоскость дна горизонтальна (см. рисунок слева), то чему должно быть равно значение угла α для того, чтобы отражённый дном ультразвуковой сигнал был принят на катере?

№	1	2	3	4	5	6
$\alpha, 10^{-3}$ рад	1,0	2,0	5,0	7,5	10,0	20,0

2. (4 балла) Найдите угол α в случае, если глубина водоёма увеличивается в направлении скорости катера, так что плоскость дна составляет малый угол $\gamma = 5^\circ$ с горизонталью (см. рисунок справа).

№	1	2	3	4	5	6
$\alpha, 10^{-2}$ рад	10,0	8,0	6,0	4,0	2,0	1,0

3. (1 балл) Каково значение частоты принимаемого сигнала относительно частоты излучаемого (меньше, равно, больше) в случае, описанном в пункте b) задачи?

кте b) задачи?

1	2	3
Меньше	Равно	Больше

Подсказка

За время пробега сигнала катер смещается на vt , а сам сигнал проходит путь ct . Для наклонного дна удобно считать, что сигнал идёт от «мнимого» источника, зеркального образа катера.

Ответ

а) $\alpha = 10^{-2}$ рад (столбец 5); б) столбец 2; в) столбец 1 (меньше).

Решение

Приравняв время распространения звука и время движения катера, а также используя малость угла α , получим соотношение

$$\alpha \approx \sin \alpha = \frac{v}{c} = 10^{-2} \text{ рад.}$$

Найденное значение угла α совпадает со значением, стоящим в столбце номер 5.

В случае, если дно составляет малый угол γ с горизонталью, искомый угол α также можно считать малым. Легко видеть, что в этом случае прямая, вдоль которой распространяются ультразвуковые импульсы, испускаемые эхолотом, отклоняется от вертикали в направлении по часовой стрелке (а не против, как в первом случае). Используя малость углов α и γ , находим ответ:

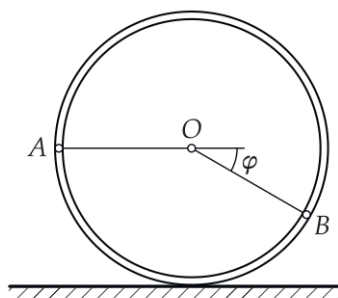
$$\alpha \approx \gamma - \frac{v}{c} \approx (8,7 - 1,0) \cdot 10^{-2} = 7,7 \cdot 10^{-2}.$$

Значение, наиболее близкое к найденному, стоит в столбце номер 2.

Принимаемые на катере импульсы могут рассматриваться как излучаемые движущимся фиктивным источником, который удаляется от катера. Частота волн, принимаемых от удаляющегося излучателя, уменьшается по сравнению со случаем, когда излучатель неподвижен (эффект Доплера), поэтому правильный ответ стоит в столбце номер 1.

2 Радиусы кривизны

Тонкий обруч радиусом 14,1 см катится без проскальзывания с постоянной скоростью по горизонтальной поверхности. Ответы на следующие вопросы дайте в сантиметрах, округлите до целого.



- (2 балла) Чему равен радиус кривизны траектории такой точки A обруча, что в данный момент вектор $\vec{OA}$ лежит в горизонтальной плоскости (см. рисунок)?
- (4 балла) Найдите радиус кривизны траектории точки B обруча, для которой в рассматриваемый момент времени вектор $\vec{OB}$ составляет угол $\varphi = \frac{\pi}{6}$ с горизонталью.

Подсказка

При качении с постоянной скоростью ускорение точки обруча такое же, как при вращении вокруг оси в системе, движущейся со скоростью оси. Радиус кривизны найдите как $v^2/a_{\perp}$.

Ответ

а) $r_A = 2\sqrt{2}R \approx 40$ см; б) $r_B = 2R \approx 28$ см.

Решение

Ускорение точки A в системе, движущейся со скоростью оси, и в лабораторной системе одинаковое. Оно равно $a_A = \omega^2 R$ и направлено горизонтально (ω — угловая скорость). Скорость точки A равна $v_A = \omega R\sqrt{2}$ и направлена под углом $\frac{\pi}{4}$ к горизонтали. Радиус кривизны траектории определяется из соотношения

$$r_A = \frac{v_A^2}{a_A^{(\perp)}} = \frac{v_A^2 \sqrt{2}}{a_A},$$

где $a_A^{(\perp)}$ — проекция ускорения на направление, перпендикулярное скорости. Таким образом, ответ: $r_A = 2\sqrt{2}R \approx 40$ см.

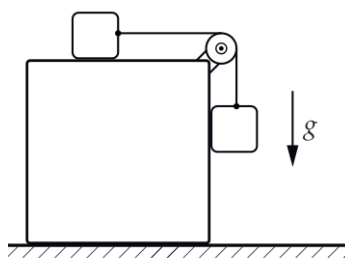
Рассуждая так же, как в пункте а), можно получить для радиуса кривизны траектории точки B соотношение

$$r_B = 4R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

из которого следует ответ: $r_B = 2R \approx 28$ см.

3 Куб и кубики

В механической системе, изображённой на рисунке, блок идеальный, нить невесомая и нерастяжимая, масса любого маленького кубика равна массе большого куба. В ответе на любой из вопросов задачи укажите номера всех столбцов таблицы (без запятых и пробелов), в которых стоят значения μ , удовлетворяющие условию.



1. (2 балла) Пусть трение между маленькими кубиками и большим кубом отсутствует. При каких значениях коэффициента трения μ между горизонтальной поверхностью и большим кубом он будет оставаться в покое при движении маленьких кубиков?

№	1	2	3	4	5	6
μ	0,08	0,12	0,16	0,21	0,27	0,32

2. (3 балла) Пусть коэффициент трения между верхним маленьким кубиком и большим кубом равен 0,25. При каких значениях коэффициента трения μ между горизонтальной поверхностью и большим кубом последний будет оставаться в покое при движении маленьких кубиков?

№	1	2	3	4	5	6
μ	0,24	0,18	0,15	0,12	0,09	0,03

Подсказка

Большой куб остаётся в покое, пока горизонтальная составляющая силы, с которой нить давит на ось блока, не превосходит максимальной силы трения покоя. Найдите ускорение кубиков и натяжение нити.

Ответ

а) 456; б) 123.

Решение

Критическое значение коэффициента трения в пункте а) находится из условия равенства горизонтальной составляющей силы давления на ось блока и максимальной силы трения покоя, действующей на большой куб. Это рассуждение приводит к соотношению

$$\mu_a(mg + mg + T_a) = T_a,$$

в котором T_a — сила натяжения нити, удовлетворяющая равенству

$$T_a = ma_a = m \cdot \frac{mg}{2m} = \frac{mg}{2}.$$

Таким образом, искомый коэффициент трения равен $\mu_a = 0,2$. Номера столбцов таблицы, содержащих значения, превышающие μ_a (удовлетворяющие условию пункта а) задачи) — 456 (без запятых и пробелов).

В условиях пункта б) задачи уравнение, из которого находится коэффициент трения, изменится (следует учесть, что на большой куб дополнительно будет действовать сила трения со стороны верхнего маленького кубика):

$$\mu_b(mg + mg + T_b) = T_b - \frac{mg}{4}.$$

Значение силы натяжения в этом случае равно

$$T_b = ma_b + \frac{mg}{4} = m \cdot \frac{mg - \frac{mg}{4}}{2m} + \frac{mg}{4} = \frac{5mg}{8}.$$

Таким образом, предельное значение коэффициента трения оказывается равно $\mu_b = \frac{1}{7} \approx 0,142$, так что в этом случае подходящие значения стоят в первых трёх столбцах таблицы, поэтому ответ: 123.

4 Пластином по шайбе

На гладкой горизонтальной поверхности лежат две маленькие деревянные шайбы массами m и $2m$, связанные лёгкой нерастяжимой ниткой длиной 10 см, при этом нитка не провисает. В шайбу массой m попадает кусочек пластина массой m и прилипает к нему. Скорость пластина перед попаданием в шайбу направлена перпендикулярно нитке и равна $v = 10$ см/с.

- (2 балла) Через какое минимальное время скорость шайбы массой $2m$ достигнет максимума? Ответ выразите в секундах, округлите до целого.
- (2 балла) Найдите максимальное значение скорости шайбы массой $2m$. Ответ выразите в см/с.

Подсказка

После удара перейдите в систему центра масс: в ней обе части системы равномерно вращаются вокруг центра масс. Когда скорость шайбы $2m$ в лабораторной системе максимальна?

Ответ

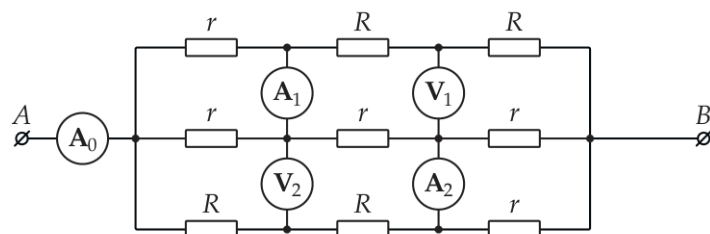
a) $t \approx 6$ с; b) 5 см/с.

Решение

После попадания пластилина в шайбу центр масс образовавшейся системы (располагающийся в середине нитки) движется с постоянной скоростью, равной $\frac{v}{4} = 2,5$ см/с, при этом шайбы в системе центра масс вращаются с угловой скоростью $\omega = \frac{v}{2l} = 0,5$ рад/с, где l — длина нитки. Скорость шайбы массой $2m$ достигает максимума за время, равное половине периода: $t = \frac{\pi}{\omega} \approx 6$ с. Максимальное значение скорости шайбы массой $2m$ при этом оказывается равно $\frac{v}{2} = 5$ см/с.

5 Опять приборы

Выводы цепи, схема которой показана на рисунке ниже, подключены к специальному источнику напряжения, так что амперметр A_0 показывает ток $I_0 = 4$ мА, а вольтметр V_1 — напряжение $U_1 = 2$ В. Все приборы в этой цепи идеальные, а значения r и R сопротивлений резисторов связаны соотношением $r = 4R$.



1. (2 балла) Определите напряжение между выводами A и B . Ответ выразите в вольтах, округлите до целого.
2. (2 балла) Чему равно сопротивление R ? Ответ выразите в килоомах, округлите до целого.
3. (1 балл) Найдите показания амперметров A_1 и A_2 . Ответ дайте в миллиамперах, округлите до целого.

Подсказка

Идеальный амперметр можно заменить проводом, а идеальный вольтметр убрать из схемы. Посмотрите, из каких одинаковых по сопротивлению ветвей тогда состоит цепь.

Ответ

a) $U_{AB} = 8$ В; b) $R = 1$ кОм; c) $I_1 = I_2 = 1$ мА.

Решение

После преобразований цепь сводится к параллельному соединению резисторов сопротивлением $4R$, поэтому сопротивление цепи между выводами A и B равно $R_{AB} = 2R$. Напряжение, измеряемое вольтметром, равно $U_1 = \frac{U_{AB}}{4}$, откуда получаем искомое напряжение: $U_{AB} = 8 \text{ В}$.

Сопротивление R теперь легко находится: $R = \frac{U_{AB}}{2I_0} = 1 \text{ кОм}$.

Ток, текущий через любой из амперметров A_1 или A_2 , равен четверти тока, текущего через амперметр A_0 : $I_1 = I_2 = \frac{I_0}{4} = 1 \text{ мА}$.

6 Скорости точек квадрата

Плоская однородная пластинка в виде квадрата $ABCD$, длина стороны которого равна $14,1 \text{ см}$, скользит по гладкой горизонтальной поверхности. Известно, что в некоторый момент времени векторы скоростей точек A и B пластинки направлены вдоль диагоналей AC и BD соответственно, при этом величина скорости точки A равна 10 см/с .

1. (2 балла) Найдите скорость центра масс пластинки в рассматриваемый момент времени. Ответ выразите в см/с , округлите до целого.
2. (2 балла) Сколько полных оборотов вокруг движущейся вертикальной оси, проходящей через центр масс, совершит пластинка за 30 секунд движения?

Подсказка

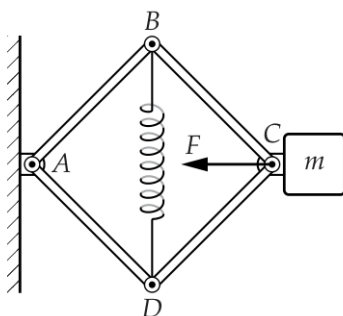
Найдите мгновенный центр скоростей как точку пересечения перпендикуляров к скоростям точек A и B .

Ответ

а) 14 см/с ; б) 4 .

7 На шарнирах

Жёсткие стержни одинаковой длины $l = 10 \text{ см}$, соединённые шарнирами, образуют конструкцию $ABCD$ в виде ромба. Шарнир A закреплён на стене, к шарниру C присоединён груз массой 1 кг (см. рисунок). Шарниры B и D связаны пружиной жёсткостью 100 Н/м , при этом длина недеформированной пружины в $1,2$ раза больше длины стержня. К шарниру C прикладывают силу $F = 10 \text{ Н}$, направленную вдоль диагонали AC . Найдите величину ускорения груза в момент, когда длина диагонали BD станет в $\sqrt{2}$ раз больше длины стержня. Конструкция находится в невесомости. Массами стержней и шарниров, трением в шарнирах, а также их размерами можно пренебречь. Ответ выразите в м/с^2 , округлите до целого.



Подсказка

Масса сосредоточена только в грузе, поэтому удобно использовать принцип виртуальных перемещений: свяжите малые смещения точки C и растяжение пружины.

Ответ

$$a \approx 8 \text{ м/с}^2.$$

8 Доска и кубик

На конце достаточно длинной доски массой $2m$, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, располагается небольшой кубик массой m . Кубику сообщается скорость, направленная вдоль доски (см. рисунок). Вследствие трения скорость кубика относительно доски в процессе движения уменьшается и к моменту, когда кубик достигает конца доски, становится в 4 раза меньше, чем в начале движения.



Ответы на вопросы задачи дайте в виде десятичных дробей, округлите до десятых.

1. (2 балла) Какая часть начальной кинетической энергии кубика в лабораторной системе отсчёта выделится в виде тепла в процессе его движения по доске?
2. (3 балла) Если длина доски равна 1 м, а начальная скорость кубика равна 4 м/с, то чему равен коэффициент трения кубика о поверхность доски? Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

Подсказка

Закон сохранения импульса даёт скорость доски в конце движения. Выделившееся тепло равно убыли кинетической энергии системы, а оно же равно работе силы трения на пути кубика относительно доски.

Ответ

а) 0,6; б) 0,5.

9 Неупругие частицы

В невесомости вдали от других тел происходит столкновение двух частиц одинаковой массы, одна из которых до столкновения покоится. Известно, что в процессе столкновения суммарная внутренняя энергия частиц увеличивается на величину E_0 (энергия возбуждения).

1. (2 балла) Чему должно быть равно отношение $k = \frac{E}{E_0}$ кинетической энергии налетающей частицы к энергии возбуждения для того, чтобы после столкновения величина скорости налетающей частицы оказалась равна $\frac{1}{3}$ скорости до столкновения при этом направление скорости осталось бы таким же, как и до столкновения?

№	1	2	3	4	5	6
k	1,2	1,5	1,8	2,0	2,3	2,5

2. (5 баллов) Пусть кинетическая энергия налетающей частицы равна $3E_0$. Определите максимальный угол $\beta_{\max}$ между скоростями частиц после столкновения.

После столкновения.

№	1	2	3	4	5	6
$\beta_{\max}$	15°	30°	45°	60°	75°	80°

В каждом из пунктов в ответе на вопрос укажите номер столбца таблицы, в котором стоит значение, наиболее близкое к найденному вами.

Подсказка

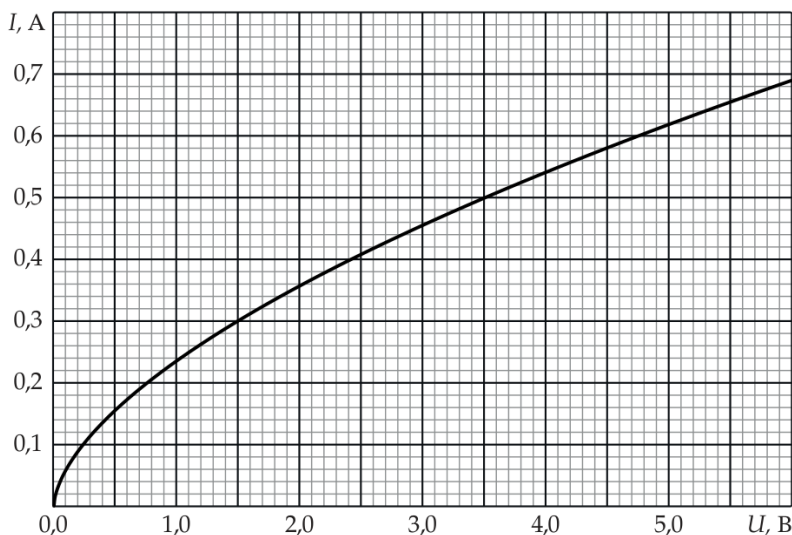
Запишите законы сохранения импульса и энергии (с учётом E_0). Во втором пункте удобно изобразить импульсы частиц векторным треугольником.

Ответ

а) столбец 5; б) столбец 4.

10 Характеристика лампы

На рисунке, представленном ниже, вы видите вольт-амперную характеристику лампочки накаливания. Известно, что если подключить эту лампочку к идеальному источнику, напряжение между выводами которого равно 5 В, то при температуре в комнате вдали от лампочки $t_0 = 20^\circ\text{C}$ температура лампочки t_1 установится на $\Delta t = 32^\circ\text{C}$ выше комнатной. Лампочку соединяют последовательно с резистором сопротивлением 3 Ом и подключают образовавшуюся цепь к тому же идеальному источнику с напряжением 5 В, что и в первом случае.



1. (2 балла) Определите силу тока I , текущего через резистор.

№	1	2	3	4	5	6
I , А	0,62	0,55	0,50	0,40	0,36	0,32

2. (2 балла) Считая мощность теплоотдачи с поверхности лампочки пропорциональной разности температур лампочки и окружающей среды вдали от лампочки, найдите температуру t_2 лампочки.

№	1	2	3	4	5	6
$t_2, ^\circ\text{C}$	52	45	42	38	32	28

В каждом из пунктов в ответе на вопрос укажите номер столбца таблицы, в котором стоит значение, наиболее близкое к найденному вами.

Подсказка

Напряжения на лампе и резисторе в сумме дают 5 В: нанесите на график нагрузочную прямую $I = (5 - U)/3$ и найдите точку пересечения с характеристикой. Мощность на лампе равна UI .

Ответ

а) столбец 3; б) столбец 4.