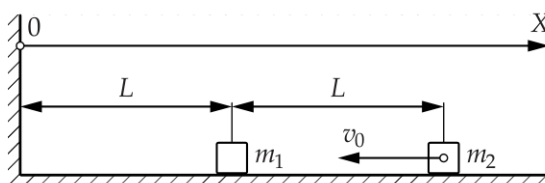


МОШ, 2022/23, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Казалось бы, при чём здесь π ?

На гладком горизонтальном столе покоятся два маленьких бруска, массы которых равны $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 10^N$ кг, где N — некоторая константа. В момент времени $t = 0$ второму бруску сообщают скорость v_0 (см. рисунок). Столкновения брусков друг с другом и со стенкой в процессе дальнейшего движения считаются абсолютно упругими.



Пусть ось OX направлена вправо, координата стенки равна нулю. Проследим за движением брусков, рассмотрев зависимость $x_2(x_1)$ — координаты второго бруска в некоторый момент времени от координаты первого в тот же момент. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка M с координатами (x_1, x_2) . Со временем координаты брусков изменяются, а точка M движется по плоскости X_1OX_2 .

- а) Найдите скорость точки M в момент, когда проекции скоростей брусков на ось OX равны v_1 и v_2 соответственно. Какой угол составляет вектор скорости точки M с осью OX_1 ? Нарисуйте траекторию движения точки M по плоскости X_1OX_2 для значений масс $m_1 = m_2 = 1$ кг ($N = 0$).

Введём в рассмотрение координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, связанные с координатами (x_1, x_2) формулами $\tilde{x}_1 = \sqrt{m_1} x_1$ и $\tilde{x}_2 = \sqrt{m_2} x_2$. Положению брусков, при котором их координаты равны x_1 и x_2 , соответствует точка $\tilde{M}$ с координатами $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ на плоскости $\tilde{X}_1O\tilde{X}_2$.

- б) Воспользовавшись законом сохранения энергии, покажите, что величина скорости точки $\tilde{M}$ сохраняется при абсолютно упругом ударе брусков.

Пусть за мгновение перед столкновением брусков острый угол между прямой, задаваемой уравнением $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} \tilde{x}_1$, и скоростью точки $\tilde{M}$ равен α . Используя законы сохранения импульса и энергии, докажите, что после столкновения брусков острый угол между прямой $\tilde{x}_2 = \frac{\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}} \tilde{x}_1$ и скоростью точки $\tilde{M}$ также равен α .

- в) На каком расстоянии от стенки произойдёт пятое столкновение брусков, если параметр N равен 2?
- г) Сколько раз столкнётся брусок массой m_1 с бруском массой m_2 и стенкой при $N = 4$?

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\operatorname{tg} x \approx \sin x \approx x$, справедливая при малых x ($x \ll 1$).

Подсказка

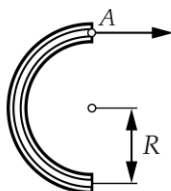
Энергия системы равна половине квадрата скорости точки $\tilde{M}$, поэтому в новых координатах упругие удары работают как отражения луча от зеркал.

Ответ

a) $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$, $\operatorname{tg} \alpha = v_2/v_1$; c) $0,13 L$; d) 314.

2 Тянут канат

Внутри закреплённой горизонтальной тонкой трубки, изогнутой в форме полуокружности радиуса R , расположен однородный гибкий канат длиной πR , масса которого равна m . Канат начинают тянуть за свободный конец A , прикладывая силу по касательной, как показано на рисунке.



Чему равна и куда направлена суммарная сила реакции трубки, действующая на канат, если ускорение точки A каната равно a ? Считайте внутренние стенки трубки гладкими, а канат нерастяжимым. Рассмотрите начальный момент времени, когда скорость каната равна нулю. Силой тяжести можно пренебречь.

Подсказка

Запишите теорему о движении центра масс каната: сумма внешних сил равна $m\vec{a}_{\text{цм}}$. Найдите ускорение центра масс, разбив канат на малые элементы, ускорения которых направлены по касательной.

Ответ

$$R_p = ma \frac{\sqrt{4 + \pi^2}}{\pi^2}, \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\pi}{2}.$$

3 Баллон на платформе

Тележка установлена на горизонтальных прямолинейных рельсах и может двигаться по ним без сопротивления. На тележке закреплён сосуд цилиндрической формы, ось которого параллельна рельсам. Длина цилиндра и его радиус равны L и r соответственно. Масса тележки с пустым сосудом равна M . Сосуд заполняют идеальным газом массой m при температуре T_0 . Одно основание сосуда поддерживают при температуре T_0 . Температура другого основания в начальный момент также равна T_0 , но затем её медленно увеличивают до величины $T_0 + \Delta T$ (при этом известно, что $\Delta T \ll T_0$). Боковая поверхность сосуда теплоизолирована.

Введём ось OX , направив её вдоль оси цилиндра от основания с температурой $T_0 + \Delta T$ к основанию с температурой T_0 . Пусть начало координат совпадает с основанием цилиндра с температурой $T_0 + \Delta T$. Задачу решайте приближённо, пренебрегая всеми слагаемыми, пропорциональными квадрату малого параметра $\delta T = \frac{\Delta T}{T}$ и его старшим степеням. Можно использовать приближённую формулу $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, справедливую при малых x ($|x| \ll 1$).

- а) Определите зависимость плотности газа в цилиндре от координаты $\rho(x)$.
 б) Найдите смещение тележки d относительно начального положения.

Подсказка

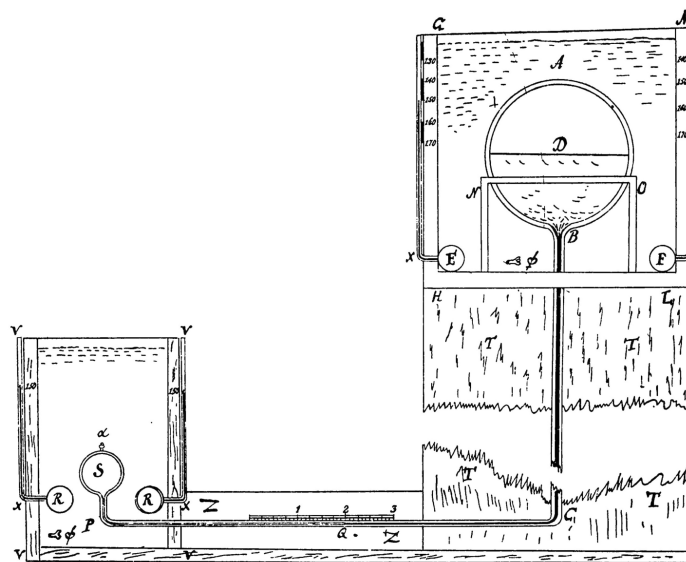
Давление газа в медленном процессе одинаково по всему объёму, а температура вдоль цилиндра меняется линейно. Внешних горизонтальных сил нет — что можно сказать о центре масс системы?

Ответ

$$\text{а) } \rho(x) = \frac{m}{\pi r^2 L} \left(1 + \frac{2x - L}{2L} \delta T \right); \quad \text{б) } d = \frac{m}{M + m} \cdot \frac{L}{12} \delta T.$$

4 Барометр Ломоносова

Для измерения небольших изменений ускорения свободного падения δg (обусловленных, например, изменением высоты над уровнем моря или притяжением Луны) Михаил Васильевич Ломоносов предложил создать прибор (*универсальный барометр*), конструкцию которого описал так: «Возьмём стеклянный шар AB с толстыми стенками и внутренним диаметром в три дюйма; соединим с ним барометрическую трубку BC такой длины, чтобы от центра шара до изгиба C было 28 дюймов; после изгиба пусть идёт горизонтальная трубочка CP длиною в фут или больше со стеклянным шаром S диаметром в дюйм; просвет в трубочке CP пусть будет диаметром в $\frac{1}{4}$ линии». Схема, сопровождавшая описание, приводится ниже.



Предполагалось, что в прибор заливается ртуть так, чтобы при вертикальном положении трубки BC больший шар был заполнен наполовину (при этом над ртутью не оставалось воздуха), а трубка PC была заполнена до точки Q (середина PC). После этого малый шар герметизировался, оба шара размещались в специальных ящиках, заполненных тающим льдом. Ожидалось, что изменение ускорения свободного падения можно будет обнаружить по изменению положения границы столба ртути в горизонтальной трубке, которое фиксировалось линейкой, расположенной рядом с трубкой. Прибор не был изготовлен, вероятно заявка Ломоносова была отклонена.

- а) Пусть расстояние между соседними делениями шкалы линейки составляет 1 линию. Какое минимальное относительное изменение $\frac{\delta g}{g}$ ускорения свободного падения можно было бы обнаружить при помощи универсального барометра?

1 фут = 12 дюймов, 1 дюйм = 10 линий, 1 дюйм = 2,54 см. Плотность ртути и давление её насыщенных паров при 0 °С равны 13,6 г/см³ и 0,25 кПа соответственно.

- б) На какой минимальной высоте над уровнем моря можно было бы измерить изменение ускорения свободного падения при помощи описанного прибора с относительной погрешностью не больше, чем 20 %? Считайте, что погрешность определяется только погрешностью считывания линейки, радиус Земли равен 6400 км.

Подсказка

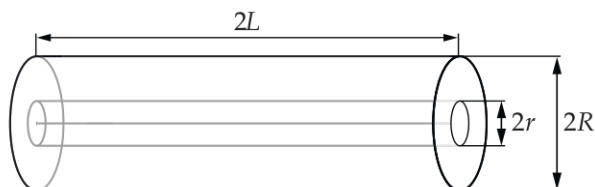
Газ в малом шаре и трубке изменяется изотермически; давление ртутного столба в барометрической трубке пропорционально g . Свяжите малые относительные изменения g , давления и объёма газа.

Ответ

- а) $\left| \frac{\Delta g}{g} \right| \approx 10^{-4}$ (или в два раза меньше, если считается, что глаз способен различить половину цены деления); б) $H \approx 900$ м.

5 Кольцо и стержень

В однородном диэлектрическом цилиндре длиной $2L$ и диаметром $2R$ сделан цилиндрический канал малого радиуса r ($r \ll R$), соосный цилиндру (см. рисунок, представленный ниже).



В канал вставлен однородно заряженный стержень длиной $2L$ круглого сечения, диаметр стержня чуть меньше диаметра канала. Стержень может двигаться свободно вдоль оси канала. На цилиндре закреплено тонкое однородно заряженное кольцо, плоскость которого перпендикулярна оси цилиндра и делит цилиндр пополам. Кольцо и стержень на рисунке не изображены. Масса цилиндра с кольцом равна массе стержня и равна M . Стержень и кольцо несут одинаковые заряды разных знаков, равные по абсолютной величине q . Стержень смещают на небольшое расстояние x_0 ($x_0 \ll L$) от положения равновесия и отпускают.

- а) Чему равна максимальная скорость стержня, если цилиндр закреплён?
б) Чему равна максимальная скорость стержня после освобождения системы, если цилиндр не удерживается внешней силой?

Гравитацией, всеми видами трения, а также эффектами, связанными с поляризацией диэлектрика, можно пренебречь.

Подсказка

Для малых смещений сила на стержень линейна по смещению, то есть он совершает гармонические колебания; максимальную скорость найдите из энергии. Во втором пункте работает закон сохранения импульса.

Ответ

$$\text{a) } v = x_0 \sqrt{\frac{q^2}{m(L^2 + R^2)^{3/2}}}; \quad \text{b) } v = x_0 \sqrt{\frac{q^2}{2m(L^2 + R^2)^{3/2}}}.$$