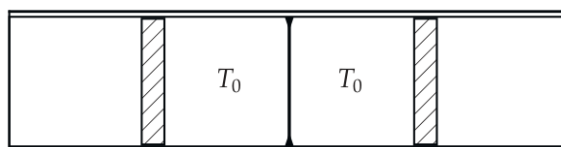


МОШ, 2022/23, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 Разная работа

В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находятся в состоянии теплового равновесия при температуре 310 К две порции идеального одноатомного газа, разделённые жёсткой, неподвижной, хорошо проводящей тепло перегородкой (см. рисунок). Поршни могут двигаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 К. Универсальная газовая постоянная R равна 8,3 Дж/(моль·К).



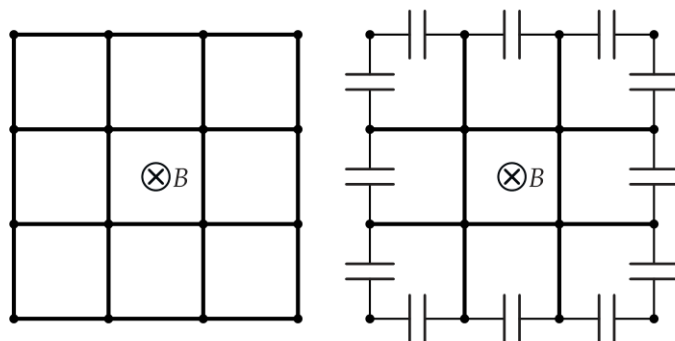
1. Найдите теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.
2. Какую работу A_T совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

Ответ

$$1) c = -\frac{5R}{2} \text{ (в начале и в конце процесса); } 2) A_T = -4R\Delta T \approx 1000 \text{ Дж, } A_F = p_0\Delta V - A_T = RT_0 \left(\frac{T_0^4}{(T_0 + \Delta T)^4} - 1 \right) - A_T \approx 300 \text{ Дж.}$$

2 Токи и заряды

Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3×3 ячейки. Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через её центр (см. рисунок слева). Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r . В соленоиде создаётся магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке. Сила тока в витках соленоида равномерно увеличивается со временем, так что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 4\mathcal{E}_0$.



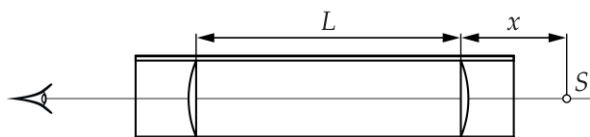
1. Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.
2. Все перемычки на границе сетки заменили на конденсаторы одинаковой ёмкости (см. рисунок справа). Найдите напряжения на конденсаторах.

Ответ

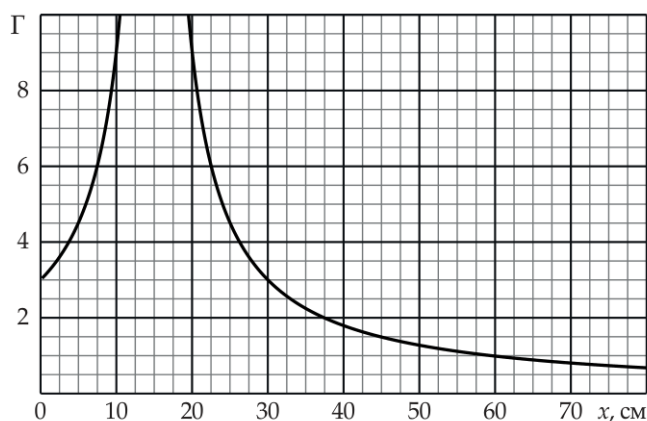
- 1) $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$, $i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}$, $i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}$, $i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}$; направления токов показаны на рисунке в решении;
 2) $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, $U_2 = 5\mathcal{E}_0$.

3 Увеличение системы

Внутри трубы с непрозрачными стенками располагаются две одинаковые тонкие плосковыпуклые линзы. Плоскости линз перпендикулярны оси трубы (см. рисунок).



Наблюдатель рассматривает через систему линз небольшой предмет S , располагающийся на расстоянии x от передней линзы. График зависимости поперечного увеличения Γ от расстояния x показан на рисунке. Предполагая, что изображение формируется параксиальными (приосевыми) лучами, определите расстояние L между линзами, а также их фокусное расстояние f .



Ответ

$$f = 60 \text{ см}, L = \frac{2f}{3} = 40 \text{ см}.$$

4 Поджатая пружина

Зависимость относительного удлинения δx поджатой пружины от силы F , растягивающей её в невесомости, изображена на графике, представленном ниже ($\delta x = \frac{x}{L_0}$, L_0 — начальная длина пружины, x — удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \leq F_0$, если же сила F становится больше F_0 , то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по линейному закону $\delta x = \frac{F - F_0}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \text{const}$.



Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ε такие же, как для исходной пружины длиной L_0 . В каждом из пунктов масса пружины обозначается M . Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением $k = \frac{F(x) - F_0}{x}$ при $F > F_0$. Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин.

Безразмерные параметры $\gamma = \frac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \frac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жёсткость и силу поджатия пружины, g — ускорение свободного падения.

1. От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров ΔL , k , L_0 .
2. Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1$, $\gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0 , f_0 , μ .

3. Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна её длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0, f_0, γ .
4. Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \frac{L - L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \frac{m}{M}$ грузов (M — масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице ниже.

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
$\delta L, \%$	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

Определите относительную жёсткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

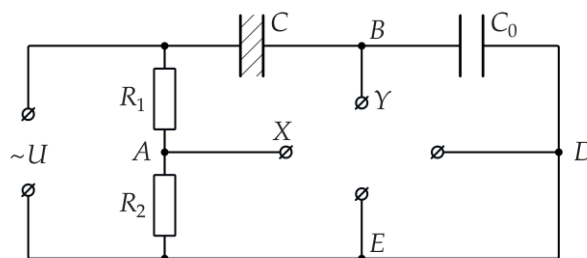
Ответ

1) $y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0} \right)$; 2) $L_1 = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0 \right) L_0$; 3) $L_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1 - f_0)^2}{2\gamma} \right)$; 4) $f_0 = 0,8$, $\gamma = 2$.

5 Диэлектрический гистерезис

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

1. Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображённую на рисунке.

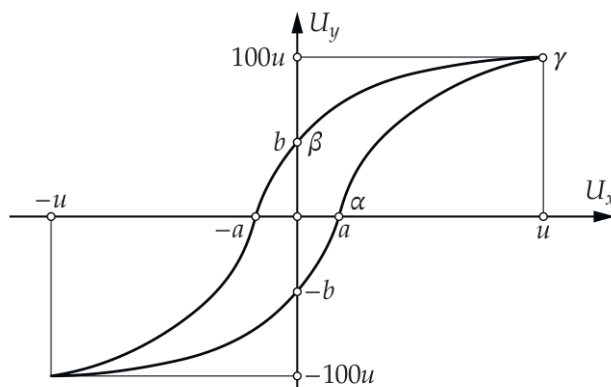


Ёмкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \frac{100S\epsilon_0}{d}$, где d и S — расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\epsilon_0}{dC_0}$$

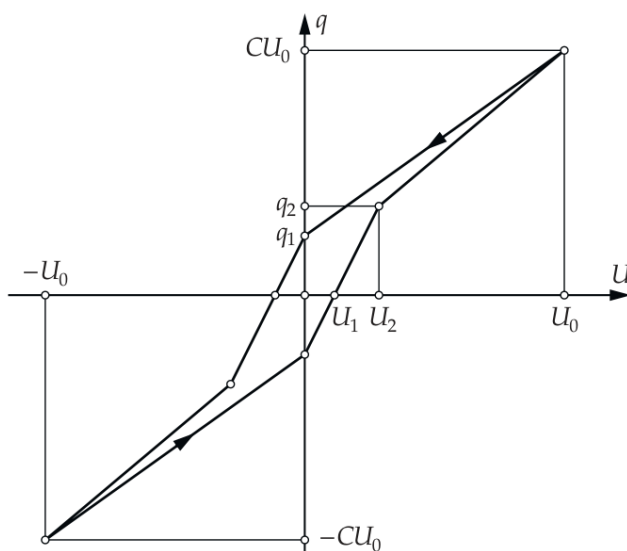
На вход цепи подаётся гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D , изображённая

на рисунке. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи.



Определите абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_p|$ на одной из сторон диэлектрической пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в состояниях, соответствующих точкам α, β, γ на графике. Найдите напряжённость поля в диэлектрике в состояниях α и γ . Площадь обкладок нелинейного конденсатора S , ёмкость C_0 эталонного конденсатора, обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ϵ_0 .

- Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n , напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0 , а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике, приведённом на рисунке ниже.



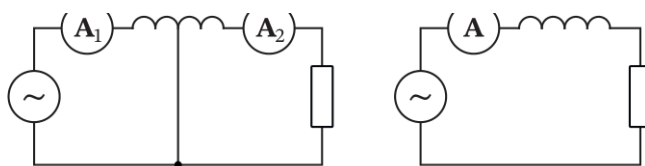
Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0,1U_0$, $U_2 = 0,25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0,1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C, U_0, n .

Ответ

$$1) |\sigma_p^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}, |\sigma_p^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}, |\sigma_p^{(\gamma)}| = \frac{99 C_0 u}{S} \approx \frac{100 C_0 u}{S}; E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S \varepsilon_0}, E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S \varepsilon_0}; \quad 2) P_g = 4 C U_0^2 n, \\ P_R = 3,8 C U_0^2 n.$$

6 Как в трансформаторе

Катушка намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. К витку в середине катушки присоединён провод, и собрана цепь, показанная на рисунке слева. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда не зависит от подключаемой нагрузки, внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Идеальные амперметры переменного тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2 .



Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке справа, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и цепь на рисунке слева?

Ответ

$$I = I_2 \cdot \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15 I_2^2}}.$$

7 Излучает и падает

В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e , e , c и ε_0 соответственно.

1. Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e . Известно, что мощность излучения движущегося электрона даётся формулой

$$P = A \cdot e^\alpha c^\beta \varepsilon_0^\gamma a^\delta,$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: α , β , γ , δ .

2. В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он должен двигаться не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt , за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR , при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\frac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Ответ

$$1) \alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -1, \delta = 2; \quad 2) \Delta t = \frac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{Ae^4} R_0^2 \Delta R; \quad t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{Ae^4} \cdot R_0^3.$$

8 Похоже на диод

Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина) при этом $S \gg d^2$. Ось OX перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полупроводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике — это коллективное, направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ε_0 .

1. При больших значениях U_0 движение носителей заряда определяется действием электрических сил и сил сопротивления. Можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами пропорциональна напряжённости в этой точке $v(x) = \mu E(x)$, где μ — известная константа.

Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^\alpha$, определите значения постоянных A и α . Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d и S .

2. При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S \left(\frac{\mu k T}{q} \right) \frac{d\rho}{dx},$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая степенную зависимость потенциала от координаты $U(x) = Bx^\beta$, определите значения постоянных B и β . Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d, q, T и S .

3. Какому сильному неравенству вида

$$U_0 \ll f(q, \mu, T)$$

должно удовлетворять значение потенциала U_0 , чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте 3b?

Ответ

$$1) \alpha = \frac{3}{2}, A = -\frac{U_0}{d^{3/2}}, I = \frac{9}{8} \cdot \frac{\mu \varepsilon_0 S U_0^2}{d^3}; \quad 2) \beta = 3, B = -\frac{U_0}{d^3}, I = -\frac{6 \varepsilon_0 U_0 \mu k T S}{q d^3}; \quad 3) U_0 \ll \frac{k T}{q}.$$

9 Термодинамика жидкости

Коэффициент теплового расширения при постоянном давлении некоторой жидкости равен $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta T} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$, сжимаемость этой жидкости при постоянной температуре равна $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta P} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, а её молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Эти параметры можно считать постоянными в условиях данной задачи. Внутренняя энергия одного моля рассматриваемой жидкости является функцией двух переменных: молярного объёма V и температуры T и даётся формулой

$$U(V, T) = A_1 T + A_2 V + A_3 VT - pV,$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные константы, V — молярный объём, $p = p(V, T)$ — молярное давление, являющееся функцией тех же двух переменных V и T .

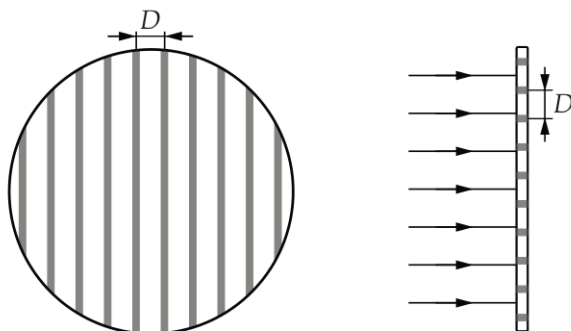
1. Считая молярный объём V функцией двух переменных: молярного давления p и температуры T , выразите малое изменение dV через малые изменения dp и dT , а также данные в условии постоянные.
2. Определите зависимость давления от температуры $p(T)$ в изохорном процессе, считая известным значение давления p_0 при температуре T_0 . Ответ выразите через заданные в условии постоянные, а также параметры p_0 и T_0 .
3. Найдите значения постоянных A_1 и A_3 в выражении для внутренней энергии. В этом пункте и в следующих получите числовые ответы.
4. Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, совершаемый с жидкостью, определите значение постоянной A_2 в выражении для внутренней энергии.
5. Для температуры $T_0 = 300 \text{ К}$ определите значение молярной теплоёмкости при постоянном давлении c_p , если молярный объём жидкости в рассматриваемом состоянии равен $V = 58 \text{ см}^3/\text{моль}$.

Ответ

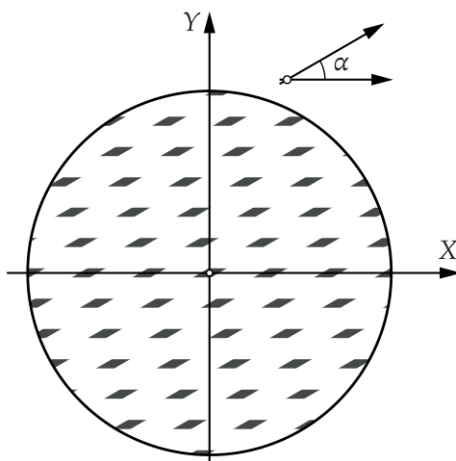
- 1) $dV = \alpha V dT - \beta V dp$; 2) $p(T) = p_0 + \frac{\alpha}{\beta}(T - T_0)$; 3) $A_1 = c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, $A_3 = \frac{\alpha}{\beta} \approx 6,8 \cdot 10^5 \text{ Па/К}$; 4) $A_2 = -\frac{1}{\beta} = -1,1 \cdot 10^9 \text{ Па}$; 5) $c_p = c_V + \frac{\alpha^2 T_0 V}{\beta} \approx 121 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

10 Решётки

Дифракционная решётка (см. рисунок ниже) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h . Обратите внимание, на рисунке прозрачные области показаны серым. В первых двух пунктах этой задачи мы рассматриваем решётки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0,2D$. Решётки располагаются параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3 \text{ м}$ от него. Экраном считается участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м . Решётки освещаются лучом лазерной указки, параметры которой одинаковые для всех пунктов: диаметр пучка $d = 2 \text{ мм}$, длина волны $\lambda = 532 \text{ нм}$. В первых двух пунктах свет падает на решётки по нормали. Середины решётки и экрана лежат на одном перпендикуляре к плоскости экрана.



1. Пусть штрихи решётки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решётку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана?
2. Пусть две дифракционные решётки накладываются друг на друга. Штрихи одной решётки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке ниже, тёмные параллелограммы символизируют прозрачные области.



При освещении такой двумерной решётки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат YOX , направление осей OY и OX совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана.

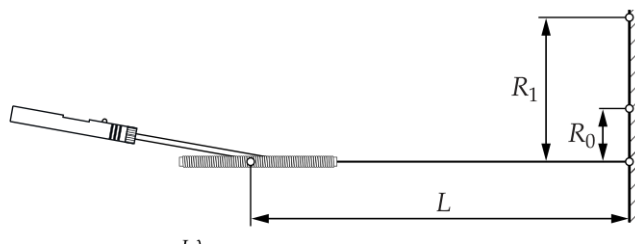
Пусть угол α равен $\frac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты нескольких светлых пятен на экране, располагающихся вблизи начала координат.

Изобразите схематично дифракционную картину и определите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

3. Гитарная струна с оплёткой представляет собой отражательную дифракционную решётку. Оплётка — это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (см. рисунок).



При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (см. рисунок, представленный ниже), на вертикальном экране, находящемся в 2–3 метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12,5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплётки.



Ответ

- 1) $\Delta x \approx \frac{L\lambda}{D} \approx 16$ см; 11 пятен; 2) для пересечения под прямым углом: $x = \frac{L\lambda}{D} n$, $y = \frac{L\lambda}{D} m$, где m и n — целые числа; для пересечения под углом α : $x = \frac{n\lambda L}{D} \sin \alpha$, $y = -\frac{n\lambda L}{D} \cos \alpha + \frac{m\lambda L}{D}$;
3) $D \approx 0,3$ мм.