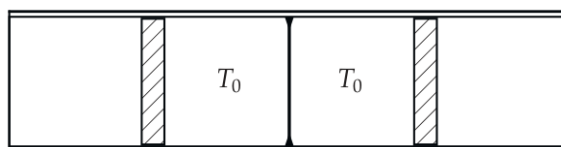


МОШ, 2022/23, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 Разная работа

В горизонтально расположенной теплоизолированной трубе между двумя подвижными теплоизолирующими поршнями находятся в состоянии теплового равновесия при температуре 310 К две порции идеального одноатомного газа, разделённые жёсткой, неподвижной, хорошо проводящей тепло перегородкой (см. рисунок). Поршни могут двигаться вдоль оси трубы, не испытывая сопротивления. Снаружи поршней находится воздух при атмосферном давлении. Количество газа в каждой порции равно 1 моль. К правому поршню прикладывается сила (меняющаяся со временем), и поршень медленно перемещается, температура газа при этом квазистатически уменьшается на 30 К. Универсальная газовая постоянная R равна 8,3 Дж/(моль·К).



1. Найдите теплоёмкость порции газа, располагающейся справа от перегородки, в начале и в конце процесса охлаждения.
2. Какую работу A_T совершает газ, располагающийся справа от перегородки, в процессе охлаждения? Какую работу A_F при этом совершает приложенная к поршню внешняя сила?

Подсказка

Левая порция остывает при постоянном давлении (атмосферном) и всё выделяемое тепло отдаёт правой порции. Что это говорит о теплоёмкости правой порции и о виде её процесса?

Ответ

$$1) c = -\frac{5R}{2} \text{ (в начале и в конце процесса); } 2) A_T = -4R\Delta T \approx 1000 \text{ Дж, } A_F = p_0\Delta V - A_T = RT_0 \left(\frac{T_0^4}{(T_0 + \Delta T)^4} - 1 \right) - A_T \approx 300 \text{ Дж.}$$

Решение

Изменение состояния газа слева и справа от перегородки происходит таким образом, что температура обеих порций остаётся одинаковой. Газ, располагающийся слева от перегородки, сжимается, поскольку его температура уменьшается при постоянном давлении, отдавая при изменении температуры на dT количество теплоты

$$\delta Q_L = c_p dT. \quad (1)$$

В формуле (1) считается, что $dT < 0$ и $\delta Q_L < 0$. Теплота (1) отдаётся порции газа в правом отсеке, которая получает количество теплоты, равное $\delta Q_R = -\delta Q_L = -c_p dT$ только от газа

в левом отсеке, поэтому теплоёмкость этой порции в любой момент в процессе охлаждения равна

$$c = \frac{\delta Q_R}{dT} = \frac{-c_p dT}{dT} = -c_p = -\frac{5R}{2}. \quad (2)$$

Таким образом, с газом в правом отсеке совершается политропический процесс с показателем политропы

$$n = \frac{c - c_p}{c - c_V} = \frac{5R}{4R} = \frac{5}{4}.$$

Работа газа, находящегося в правом отсеке, может быть найдена из первого начала термодинамики. С учётом полученного значения теплоёмкости (2) имеем формулу

$$A_{\Gamma} = Q - \Delta U = -c_p \Delta T - c_V \Delta T \approx 1000 \text{ Дж}, \quad (3)$$

где $\Delta T = -30 \text{ К}$. Для того, чтобы вычислить работу внешней силы, определим сначала конечный объём порции газа, расположенной справа от перегородки. Это можно сделать двумя способами.

Используя уравнение политропического процесса $pV^n = \text{const}$, где $n = \frac{5}{4}$ — показатель политропы, найденный выше, а также уравнение состояния идеального газа, имеем равенство $T^4 V = \text{const}$, из которого следует формула для объёма в конце процесса охлаждения

$$V_1 = V_0 \left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4. \quad (4)$$

С другой стороны, можно было бы записать соотношение, отражающее первое начало термодинамики для газа, расположенного справа от перегородки:

$$-c_p dT = c_V dT + \frac{RT}{V} dV.$$

Из этого соотношения после преобразований и подстановки значений теплоёмкостей следует дифференциальное уравнение

$$-4 \frac{dT}{T} = \frac{dV}{V},$$

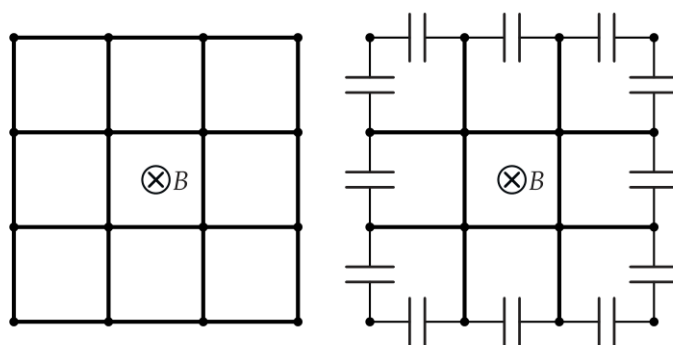
интегрируя которое, получаем равенство $-4 \ln \frac{T}{T_0} = \ln \frac{V}{V_0}$ и далее формулу (4) для объёма.

Теперь можно перейти к определению работы внешней силы. Поскольку правый поршень перемещается очень медленно, суммарная работа всех сил, действующих на него, равна нулю, следовательно справедливо равенство $A_{\Gamma} + A_F - p_0(V_1 - V_0) = 0$, подставляя в которое объём из формулы (4) и работу газа из формулы (3), получаем ответ

$$A_F = RT_0 \left(\left(\frac{T_0}{T_0 + \Delta T} \right)^4 - 1 \right) - A_{\Gamma} \approx 300 \text{ Дж}.$$

2 Токи и заряды

Внутри соленоида, ось которого вертикальна, располагается плоская проволочная сетка размером 3×3 ячейки. Ось соленоида перпендикулярна плоскости сетки и проходит через её центр (см. рисунок слева). Сопротивление перемычки, соединяющей два соседних узла, равно r . В соленоиде создаётся магнитное поле, направленное так, как показано на рисунке. Сила тока в витках соленоида равномерно увеличивается со временем, так что абсолютная величина скорости изменения магнитного потока через ячейку сетки оказывается равна $\left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = 4\mathcal{E}_0$.



1. Определите значения токов, текущих в перемычках, соединяющих узлы сетки. Сделайте рисунок, укажите направления этих токов.
2. Все перемычки на границе сетки заменили на конденсаторы одинаковой ёмкости (см. рисунок справа). Найдите напряжения на конденсаторах.

Подсказка

Схема переходит сама в себя при повороте на 90° вокруг оси соленоида, значит, токи одинаковы в симметричных перемычках. Сколько различных токов остаётся? Для каждого независимого контура запишите второе правило Кирхгофа.

Ответ

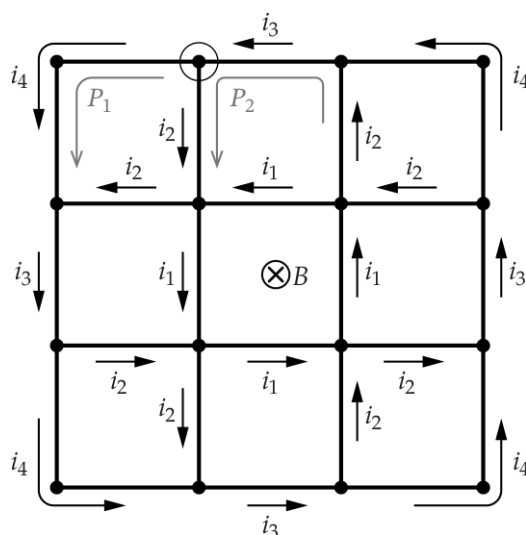
- 1) $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$, $i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}$, $i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}$, $i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}$; направления токов показаны на рисунке в решении;
- 2) $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, $U_2 = 5\mathcal{E}_0$.

Решение

При повороте в плоскости рисунка вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° (в любую сторону), схема переходит сама в себя. Отсюда следует, что по проводникам центральной ячейки текут одинаковые токи или, другими словами, по проводникам центральной ячейки циркулирует ток i_1 . Для определения этого тока можно записать закон электромагнитной индукции только для центральной ячейки, как будто всей остальной сетки не существует, тогда направление тока i_1 — против часовой стрелки — следует из правила Ленца. Значение тока даётся формулой

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}, \quad (1)$$

В каждом узле, лежащем в вершине центральной ячейки, соединяются 4 перемычки, по двум из которых текут токи i_1 , причём один из них втекает в узел, а другой — вытекает. Следовательно, по двум другим перемычкам тоже текут одинаковые токи, один из которых втекает в узел, а второй — вытекает. Обозначим эти одинаковые токи i_2 . Сделаем рисунок, на котором укажем направления токов в перемычках сетки, используя соображения «поворотной симметрии»: при повороте вокруг оси соленоида на угол, кратный 90° , картина распределения токов не должна изменяться.



Легко видеть, что в результате имеем 3 неизвестных тока: i_2 , i_3 , i_4 . Вообще говоря, направления этих токов могут быть выбраны произвольно, например так, как показано на рисунке. Если в процессе решения значение какого-либо из токов окажется отрицательным, это будет означать, что истинное направление этого тока противоположно указанному на рисунке. Отметим, что записывая второе правило Кирхгофа для контуров, состоящих из ячеек сетки, следует выбирать направление обхода против часовой стрелки (в ячейках, обозначенных P_1 и P_2 на рисунке, направление обхода указано серыми стрелками). Как следует из правила Ленца, при таком выборе направления обхода ЭДС индукции в правой части уравнений, отражающих второе правило Кирхгофа, будет иметь положительное значение.

Перейдём непосредственно к расчёту токов. Записывая для узла, помеченного окружностью на рисунке, первое правило Кирхгофа, имеем соотношение

$$i_4 = i_3 - i_2. \quad (2)$$

Второе правило Кирхгофа для контура P_1 даёт с учётом равенства (6) уравнение

$$i_3 - 2i_2 = \frac{2\mathcal{E}_0}{r}. \quad (3)$$

Аналогично, второе правило Кирхгофа для контура P_2 даёт равенство $i_3 + 2i_2 - i_1 = \frac{4\mathcal{E}_0}{r}$, подставляя в которое ток i_1 из формулы (5), получаем уравнение

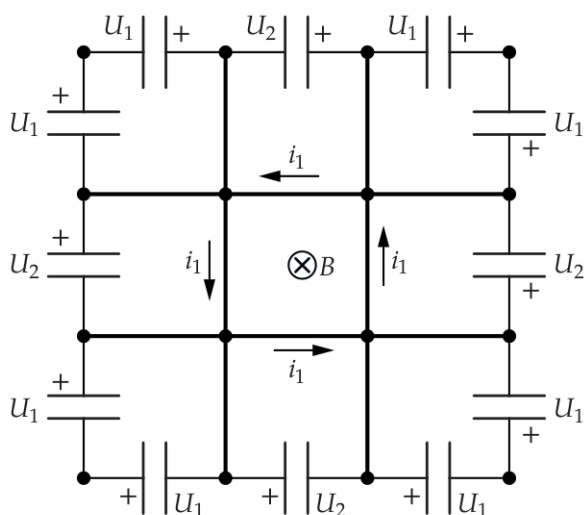
$$i_3 + 2i_2 = \frac{5\mathcal{E}_0}{r}. \quad (4)$$

Система уравнений (6)–(8) имеет решение

$$i_2 = \frac{3\mathcal{E}_0}{4r}, \quad i_3 = \frac{7\mathcal{E}_0}{2r}, \quad i_4 = \frac{11\mathcal{E}_0}{4r}.$$

Все значения получились положительными, следовательно направления токов на рисунке соответствуют реальности.

Во втором пункте, после замены перемычек на границе на конденсаторы, ток течёт только по проводникам центральной ячейки, этот ток равен $i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{r}$. Будем считать полярность зарядов на обкладках конденсаторов такой, как обозначено на рисунке. Если для напряжения на каком-либо конденсаторе получится отрицательное значение, то это будет означать, что на самом деле помеченная «+» обкладка заряжена отрицательно.



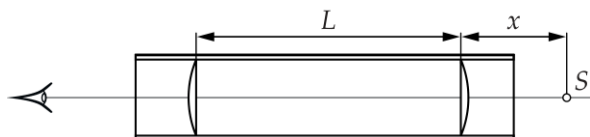
Напряжения на конденсаторах, располагающихся в угловых ячейках, одинаковы и равны $U_1 = 2\mathcal{E}_0$, поскольку сумма напряжений на этих конденсаторах должна быть равна (с точностью до знака) скорости изменения магнитного потока через ячейку. Сумма напряжений на всех конденсаторах должна быть равна абсолютной величине скорости изменения магнитного потока через все ячейки сетки. Таким образом, для определения напряжения U_2 имеем уравнение

$$8U_1 + 4U_2 = 9 \cdot 4\mathcal{E}_0,$$

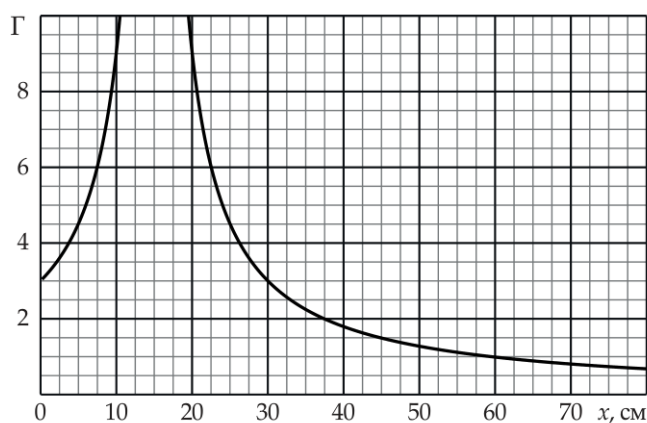
решая которое получаем ответ $U_2 = 5\mathcal{E}_0$.

3 Увеличение системы

Внутри трубы с непрозрачными стенками располагаются две одинаковые тонкие плосковыпуклые линзы. Плоскости линз перпендикулярны оси трубы (см. рисунок).



Наблюдатель рассматривает через систему линз небольшой предмет S , располагающийся на расстоянии x от передней линзы. График зависимости поперечного увеличения Γ от расстояния x показан на рисунке. Предполагая, что изображение формируется параксиальными (приосевыми) лучами, определите расстояние L между линзами, а также их фокусное расстояние f .



Подсказка

Что видно на графике при $x \rightarrow 0$? Предмет у самой правой линзы даёт у неё изображение с увеличением, близким к единице, и это изображение служит предметом для левой линзы на расстоянии L .

Ответ

$$f = 60 \text{ см}, L = \frac{2f}{3} = 40 \text{ см}.$$

Решение

Покажем относительно короткое решение этой задачи. Пусть предмет находится на расстоянии $x \rightarrow 0$ от правой линзы, проще говоря, предмет находится вблизи оптического центра правой линзы. Тогда правая линза формирует мнимое изображение предмета, располагающееся также вблизи оптического центра правой линзы, при этом предмет изображается в линзе с поперечным увеличением $\Gamma_1 = \frac{f}{f-x}$, примерно равным 1. Изображение предмета в правой линзе является фиктивным предметом для второй линзы. Этот фиктивный предмет располагается на расстоянии L от левой линзы и, как следует из графика, изображается с увеличением $\Gamma_2 = 3$ в этой линзе. Отсюда следует уравнение

$$\left| \frac{f}{f-L} \right| = 3,$$

которое имеет два решения $L = \frac{4f}{3}$ и $L = \frac{2f}{3}$.

Рассмотрим первое решение $L = \frac{4f}{3}$. Пусть расстояние до предмета меньше фокусного расстояния линзы: $x < f$. Тогда правая линза даёт мнимое изображение, располагающееся на расстоянии $y_1 = \frac{fx}{f-x}$, увеличение этого изображения равно

$$\Gamma_1 = \frac{f}{f-x}. \quad (1)$$

Расстояние от фиктивного предмета до левой линзы даётся формулой

$$x_1 = \frac{xf}{f-x} + \frac{4f}{3} = \frac{f(4f-x)}{3(f-x)},$$

Подставляя значение x_1 в формулу линзы, находим расстояние до изображения во второй линзе

$$y_1 = \frac{f(4f-x)}{f+2x}$$

и увеличение, с которым изображается фиктивный предмет во второй линзе

$$\Gamma_2 = \frac{y_1}{x_1} = \frac{3(f-x)}{f+2x}. \quad (2)$$

Перемножая увеличения, полученные в (10) и (11), находим формулу, дающую увеличение системы

$$\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \frac{3f}{f+2x}. \quad (3)$$

Из полученной формулы следует, что при изменении x от 0 до f увеличение уменьшается, что не соответствует графику, представленному в условии. Таким образом, значение $L = \frac{4f}{3}$ не подходит.

Исследуем значение $L = \frac{2f}{3}$. В этом случае, считая $x < f$, и рассуждая аналогично предыдущему случаю, имеем вместо формул (11) и (12) соотношения

$$\Gamma_2 = \left| \frac{3(f-x)}{f-4x} \right|, \quad \Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 = \left| \frac{3f}{f-4x} \right|. \quad (4)$$

Легко видеть, что вторая формула из (13) соответствует приведённому в условии графику при $f = 60$ см. Расстояние между линзами, очевидно, равно $L = \frac{2f}{3} = 40$ см. Отметим, что ответы можно получить и другим способом, например, решая задачу «в лоб».

4 Поджатая пружина

Зависимость относительного удлинения δx поджатой пружины от силы F , растягивающей её в невесомости, изображена на графике, представленном ниже ($\delta x = \frac{x}{L_0}$, L_0 — начальная длина пружины, x — удлинение). Пружина не растягивается, пока выполняется неравенство $F \leq F_0$, если же сила F становится больше F_0 , то относительное удлинение δx начинает зависеть от силы F по линейному закону $\delta x = \frac{F-F_0}{\varepsilon}$, где $\varepsilon = \text{const}$.



Далее в задаче рассматриваются однородные пружины, для любого участка которых постоянные F_0 и ε такие же, как для исходной пружины длиной L_0 . В каждом из пунктов масса пружины обозначается M . Коэффициентом упругости k поджатой пружины считается коэффициент пропорциональности между изменением силы и удлинением $k = \frac{F(x) - F_0}{x}$ при $F > F_0$. Во всех пунктах задачи рассматривается статическое равновесие пружин.

Безразмерные параметры $\gamma = \frac{kL_0}{Mg}$ и $f_0 = \frac{F_0}{Mg}$ (разные в разных пунктах задачи) характеризуют относительные жёсткость и силу поджатия пружины, g — ускорение свободного падения.

1. От поджатой пружины длиной L_0 отрезали участок длиной ΔL (в недеформированном состоянии), который стали растягивать силой F ($F > F_0$) в невесомости. Найдите длину y этого участка под нагрузкой как функцию силы F и параметров ΔL , k , L_0 .
2. Поджатая пружина, параметры которой удовлетворяют соотношениям $f_0 > 1$, $\gamma = 1$, подвешена в поле тяжести к потолку за один из концов. К другому концу присоединяют груз массой $m = \mu M$ ($\mu > f_0$). Чему будет равна длина пружины в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0 , f_0 , μ .
3. Пусть относительная сила поджатия удовлетворяет неравенству $f_0 < 1$. Пружина подвешена к потолку в поле тяжести за один из концов. Чему равна её длина в положении равновесия? Ответ выразите через параметры L_0 , f_0 , γ .
4. Поджатая пружина подвешена за один конец к потолку. К другому концу присоединяют грузы различной массы, снимая зависимость относительного удлинения $\delta L = \frac{L - L_0}{L_0}$ от относительной массы $\mu = \frac{m}{M}$ грузов (M — масса пружины). Результаты измерений представлены в таблице ниже.

μ	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
δL , %	1,0	4,0	9,0	16,0	25,0	35,0	45,0

Определите относительную жёсткость γ и относительную силу поджатия f_0 этой пружины.

Подсказка

Мысленно разбейте пружину на малые участки: каждый растянут своей силой (весом груза и нижней части пружины), и длины участков складываются в интеграл. В пункте с $f_0 < 1$ верхняя часть пружины не растягивается вовсе.

Ответ

1) $y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0} \right)$; 2) $L_1 = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0 \right) L_0$; 3) $L_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1 - f_0)^2}{2\gamma} \right)$; 4) $f_0 = 0,8$, $\gamma = 2$.

Решение

Пункт 1. В условии сказано, что параметры F_0 и ε остаются для любого куска пружины такими же, как для всей пружины, поэтому ответ на первый вопрос даётся формулой

$$y = \Delta L \left(1 + \frac{F - F_0}{kL_0} \right). \quad (1)$$

Пункт 2. В условиях этого пункта ($\mu > f_0$) любой элемент пружины деформируется под нагрузкой. Длину растянутой пружины можно найти, рассуждая следующим стандартным образом. Разделим всю недеформированную пружину на участки небольшой длины ΔL , пусть общее количество таких участков $N \gg 1$. Пусть участок с номером 1 будет самым верхним, тогда участок с номером k растягивается силой

$$F_k = Mg \left(\mu + \frac{L_0 - x_k}{L_0} \right), \quad (2)$$

где $x_k = k\Delta L$. Подставляя значение силы из формулы (15) в соотношение (14), и заменяя ΔL на dx , x_k на x , а y на dy , получаем равенство

$$dy = dx \left(1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{\mu - x/L_0}{\gamma} - \frac{f_0}{\gamma} \right).$$

Поскольку $\gamma = 1$, определение длины пружины под нагрузкой сводится к интегрированию

$$L_1 = \int_0^{L_0} \left(2 + \mu - \frac{x}{L_0} - f_0 \right) dx = \left(\frac{3}{2} + \mu - f_0 \right) L_0.$$

Отметим, что интеграл может быть вычислен, как площадь под прямой.

Пункт 3. В этом пункте часть пружины не растягивается, на неё действует сила, меньшая, чем F_0 . Длина этого участка пружины равна

$$L' = L_0 \cdot f_0. \quad (3)$$

В этом случае формула, дающая связь силы и координаты x , аналогичная (15), имеет вид

$$F = Mg \left(1 - \frac{x}{L_0} \right). \quad (4)$$

Длина растягивающейся части пружины равна

$$L'_2 = \int_0^{L_0(1-f_0)} \left(1 + \frac{1}{\gamma} - \frac{x}{\gamma L_0} - \frac{f_0}{\gamma} \right) dx. \quad (5)$$

Вычисляя интеграл (18) и прибавляя длину нерастягивающейся части пружины (16), получаем ответ

$$L_2 = L' + L'_2 = L_0 \left(1 + \frac{(1-f_0)^2}{2\gamma} \right).$$

Пункт 4. Изучив таблицу, заметим, что при значениях относительной массы груза $\mu \geq 0,8$ зависимость $\delta L(\mu)$ линейная. Это означает, что при достаточно больших относительных массах груза все участки пружины удлиняются под нагрузкой (при малых μ это не так). Рассуждая, как в пункте 2, получим для больших относительных масс соотношение

$$\gamma = \frac{\delta L(\mu_2) - \delta L(\mu_1)}{\mu_2 - \mu_1},$$

из которого (с учётом значений, приведённых в таблице) следует ответ: $\gamma = 2$. Для определения относительной силы поджатия f_0 используем результат предыдущего пункта. При $\mu = 0$ из формулы (19) следует соотношение

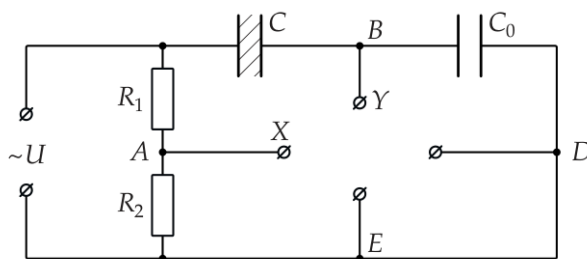
$$\delta L(0) = \frac{(1 - f_0)^2}{2\gamma}.$$

Подставив найденное значение $\gamma = 2$ и $\delta L(0) = 0,01$ в эту формулу, находим второй ответ $f_0 = 0,8$.

5 Диэлектрический гистерезис

В плоском нелинейном конденсаторе пространство между обкладками заполнено нелинейным диэлектриком, поэтому зависимость заряда конденсатора от напряжения между обкладками может быть более сложной, чем в линейном случае, для которого $q = CU$. При циклическом изменении напряжения зависимость $q(U)$ для нелинейного конденсатора имеет вид петли гистерезиса.

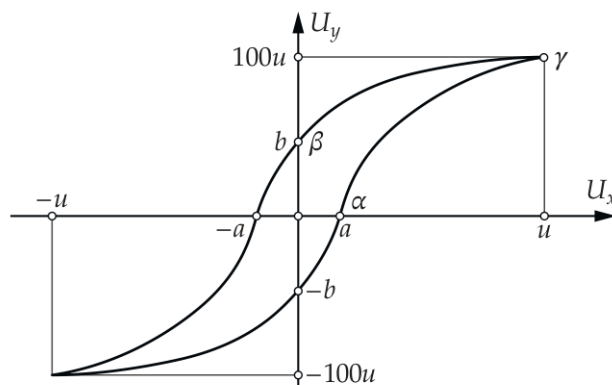
1. Для изучения свойств нелинейного конденсатора C собрали цепь, изображённую на рисунке.



Ёмкость обычного (линейного) эталонного конденсатора C_0 удовлетворяет сильному неравенству $C_0 \gg \frac{100S\epsilon_0}{d}$, где d и S — расстояние между обкладками нелинейного конденсатора и их площадь. Сопротивления резисторов подобраны так, что выполняется равенство

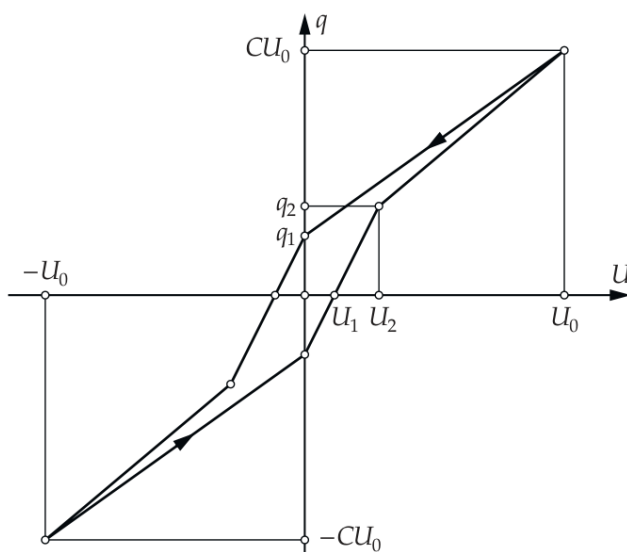
$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{S\epsilon_0}{dC_0}$$

На вход цепи подаётся гармоническое напряжение $U(t)$. К точкам A и B подключены выводы пластин осциллографа, отклоняющих луч по горизонтали и вертикали соответственно. На экране осциллографа наблюдается зависимость напряжения $U_y = \varphi_B - \varphi_E$ между точками B и E от напряжения $U_x = \varphi_A - \varphi_D$ между точками A и D , изображённая на рисунке. Подключение осциллографа не меняет распределение токов и потенциалов в цепи.



Определите абсолютную величину поверхностной плотности поляризационных зарядов $|\sigma_p|$ на одной из сторон диэлектрической пластины (соприкасающейся с обкладкой конденсатора) в состояниях, соответствующих точкам α, β, γ на графике. Найдите напряжённость поля в диэлектрике в состояниях α и γ . Площадь обкладок нелинейного конденсатора S , ёмкость C_0 эталонного конденсатора, обозначенные на графике параметры петли a, b, u считаются известными. Электрическая постоянная равна ε_0 .

2. Другой нелинейный конденсатор подключают последовательно с резистором сопротивлением R к генератору прямоугольных импульсов с частотой n , напряжение между выводами которого в течение первой половины периода равно U_0 , а в течение второй половины периода равно $-U_0$. В установившемся режиме заряд одной из обкладок конденсатора q в зависимости от напряжения между обкладками U изменяется так, как показано на графике, приведённом на рисунке ниже.



Параметры петли гистерезиса, обозначенные на графике, равны $U_1 = 0,1U_0$, $U_2 = 0,25U_0$, $q_1 = 2CU_1$, $q_2 = q_1 + 0,1CU_0$. Значения U_0 и C известны, при этом $nRC \ll 1$. Найдите среднюю за период мощность, потребляемую цепью от генератора и среднюю мощность, выделяющуюся на резисторе. Ответы выразите через параметры C, U_0, n .

Подсказка

Эталонный конденсатор и нелинейный соединены последовательно, поэтому их заряды равны: по U_x узнаёте заряд, а по U_y — напряжение на нелинейном конденсаторе. Для второго пункта: чему равна работа генератора по перемещению заряда за период и куда уходит часть этой энергии помимо резистора?

Ответ

$$1) |\sigma_p^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}, |\sigma_p^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}, |\sigma_p^{(\gamma)}| = \frac{99C_0 u}{S} \approx \frac{100C_0 u}{S}; E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S\varepsilon_0}, E^{(\gamma)} = \frac{C_0 u}{S\varepsilon_0}; \quad 2) P_g = 4CU_0^2 n, P_R = 3,8CU_0^2 n.$$

Решение

Пункт 1. Сначала рассмотрим точку γ графика зависимости $U_y(U_x)$. Справедливы соотношения

$$100u = \frac{q(\gamma)}{C_0}, \quad u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (E(\gamma)d + 100u), \quad (1)$$

где $q(\gamma)$ — заряд эталонного конденсатора, $E(\gamma)$ — напряжённость поля в диэлектрической пластине в данный момент. Из условия следует сильное неравенство

$$100 \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1, \quad (2)$$

поэтому второе уравнение из (20) можно переписать так

$$u = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot E(\gamma)d. \quad (3)$$

Таким образом, напряжение $U_x = 100u$ в точке γ пропорционально заряду $q(\gamma)$ эталонного конденсатора, а следовательно (поскольку заряды конденсаторов равны) и заряду нелинейного конденсатора. Напряжение $U_y = u$ в точке γ пропорционально напряжению на нелинейном конденсаторе. Подставляя в формулу (22) соотношение из условия, имеем искомую напряжённость

$$E(\gamma) = \frac{C_0 u}{S \varepsilon_0}. \quad (4)$$

Поверхностная плотность поляризационных зарядов найдётся из соотношения

$$\frac{q(\gamma)}{S \varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^{(\gamma)}|}{\varepsilon_0} = E(\gamma).$$

Подставим в это соотношение заряд $q(\gamma)$ из первого уравнения из (20), а напряжённость поля из формулы (23), после несложных преобразований получим ответ

$$|\sigma_p^{(\gamma)}| = \frac{100 C_0 u}{S} - \frac{C_0 u}{S} = \frac{99 C_0 u}{S}.$$

Теперь рассмотрим точку β . Легко видеть, что сумма напряжений на нелинейном и обычном конденсаторе в состоянии, соответствующем этой точке на графике, равна нулю. Этот факт отражает уравнение

$$\left(\frac{C_0 b}{S \varepsilon_0} - \frac{|\sigma_p^{(\beta)}|}{\varepsilon_0} \right) d - b = 0, \quad (5)$$

ведь заряд нелинейного конденсатора в этом случае равен $C_0 b$ (с точностью до знака). Из условия следует сильное неравенство $\frac{C_0 d}{S \varepsilon_0} \gg 1$, поэтому пренебрегая последним слагаемым в уравнении (24), получаем искомую поверхностную плотность

$$|\sigma_p^{(\beta)}| = \frac{C_0 b}{S}.$$

Наконец рассмотрим состояние диэлектрика, соответствующее точке α . Заряды конденсаторов в этом состоянии, очевидно, равны нулю, поэтому напряжённость поля в диэлектрике создаётся только поляризационными зарядами, следовательно справедливо равенство

$$\frac{|\sigma_p^{(\alpha)}|}{\varepsilon_0} \cdot d \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} = a. \quad (6)$$

Используя соотношение для сопротивлений, данное в условии, из равенства (25) имеем ответ:

$$|\sigma_p^{(\alpha)}| = \frac{C_0 a}{S}, \quad E^{(\alpha)} = \frac{C_0 a}{S \varepsilon_0}.$$

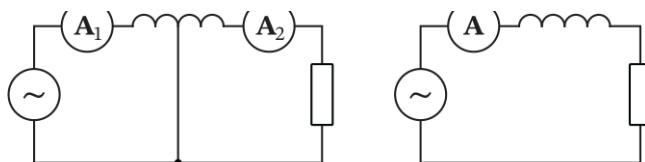
Пункт 2. Сильное неравенство $nRC \ll 1$, приведённое в условии, означает, что время, за которое заряды на обкладках конденсатора устанавливаются, значительно меньше периода колебаний напряжения.

Пусть в некоторый момент времени напряжение на выводах генератора и на конденсаторе равно $-U_0$. При изменении полярности напряжения на выводах генератора, последний перемещает заряд $Q = 2CU_0$, совершая работу $A_g^{(1/2)} = 2CU_0^2$. При обратном изменении полярности на выводах генератора, он совершает такую же работу по перемещению заряда. Таким образом, за период генератор совершает работу $A_g = 2A_g^{(1/2)} = 4CU_0^2$, следовательно средняя мощность, потребляемая цепью от генератора, равна $P_g = 4CU_0^2 n$.

Заметим, что если бы зависимость заряда конденсатора от напряжения на нём была бы линейной ($q = CU$), то вся мощность, потребляемая цепью от генератора, выделялась бы в виде тепла на резисторе. В случае нелинейного конденсатора часть работы, совершаемой генератором, тратится на «переполаризацию диэлектрика». При увеличении заряда нелинейного конденсатора от значения $-CU_0$ до значения CU_0 электрические силы совершают работу, равную $A_p^{(1/2)} = \int U dq$, численно эта работа равна площади половины петли гистерезиса, располагающейся справа от оси ординат. Очевидно, что работа электрических сил по перезарядке конденсатора за период равна площади всей петли гистерезиса $A_p = 2A_p^{(1/2)}$ — это и есть потери энергии на переполаризацию диэлектрика. Таким образом, из закона сохранения энергии следует, что на резисторе за период выделяется количество теплоты, равное $Q = A_g - A_p$. Определение A_p , как уже было сказано, сводится к расчёту площади петли гистерезиса, которая может быть найдена разными способами. Приведём здесь конечный ответ $A_p = 0,2 CU_0^2$. Таким образом, искомая мощность равна $P_R = 3,8 CU_0^2 n$.

6 Как в трансформаторе

Катушка намотана на тороидальный сердечник с большой магнитной проницаемостью. К витку в середине катушки присоединён провод, и собрана цепь, показанная на рисунке слева. Напряжение на выводах идеального генератора меняется по гармоническому закону, амплитуда не зависит от подключаемой нагрузки, внутреннее сопротивление пренебрежимо мало. Идеальные амперметры переменного тока A_1 и A_2 показывают токи I_1 и I_2 .



Что показывает идеальный амперметр переменного тока в цепи на рисунке справа, если эта цепь составлена из тех же элементов, что и цепь на рисунке слева?

Подсказка

Магнитный поток через любую часть катушки создаётся токами в обеих её половинах. Запишите условия для двух половин катушки через их токи и напряжения, как у трансформатора.

Ответ

$$I = I_2 \cdot \sqrt{\frac{I_1^2 - I_2^2}{I_1^2 + 15I_2^2}}.$$

7 Излучает и падает

В соответствии с законами классической электродинамики заряженная частица, движущаяся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Релятивистские эффекты в этой задаче не учитываются. Масса и модуль заряда электрона, скорость света в вакууме и электрическая постоянная равны m_e , e , c и ε_0 соответственно.

1. Пусть электрон движется вокруг протона по орбите, близкой к круговой. Протон считаем неподвижным, поскольку его масса много больше m_e . Известно, что мощность излучения движущегося электрона даётся формулой

$$P = A \cdot e^\alpha c^\beta \varepsilon_0^\gamma a^\delta,$$

где a — ускорение электрона, A — безразмерная константа. Определите показатели степени: α , β , γ , δ .

2. В процессе излучения энергия электрона уменьшается, поэтому он должен двигаться не по окружности, а по спирали и в некоторый момент времени должен упасть на протон. Предполагая, что за время, равное периоду обращения электрона, расстояние R между электроном и протоном изменяется незначительно, а также считая известной постоянную A в приведённой выше формуле, определите время Δt , за которое расстояние R уменьшается от известного значения R_0 на ΔR , при условии, что $\Delta R \ll R_0$. Найдите время $t_{1/2}$, за которое расстояние R уменьшается от значения R_0 до значения $\frac{R_0}{2}$.

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Подсказка

Первый пункт — анализ размерностей (мощность через e^2/ε_0 , скорость света и ускорение). Во втором приравняйте мощность излучения скорости убыли полной энергии электрона на круговой орбите, ускорение считайте центростремительным.

Ответ

$$1) \alpha = 2, \beta = -3, \gamma = -1, \delta = 2; \quad 2) \Delta t = \frac{2\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{A e^4} R_0^2 \Delta R; \quad t_{1/2} = \frac{7}{12} \cdot \frac{\pi c^3 \varepsilon_0^2 m_e^2}{A e^4} \cdot R_0^3.$$

8 Похоже на диод

Две плоские металлические пластины площадью S располагаются параллельно друг другу в точках с координатами $x = 0$ (первая пластина) и $x = d$ (вторая пластина) при этом $S \gg d^2$. Ось OX перпендикулярна пластинам. Первая пластина заземлена, потенциал второй пластины равен $-U_0$. Пространство между пластинами заполнено полупроводником, в котором носителями заряда являются частицы с зарядом q ($q > 0$). Ток в полупроводнике — это коллективное, направленное движение этих частиц. Диэлектрическая проницаемость полупроводника равна единице. Электрическая постоянная равна ε_0 .

1. При больших значениях U_0 движение носителей заряда определяется действием электрических сил и сил сопротивления. Можно считать, что средняя скорость движения носителей в направлении поля в точке с координатой x в пространстве между пластинами

пропорциональна напряжённости в этой точке $v(x) = \mu E(x)$, где μ — известная константа.

Пусть ток между пластинами установился, средняя скорость носителей $v(x)$, плотность заряда $\rho(x)$ и потенциал $U(x)$ не меняются со временем. Предполагая, что потенциал зависит от координаты по степенному закону $U(x) = Ax^\alpha$, определите значения постоянных A и α . Найдите ток между пластинами. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d и S .

2. При небольших значениях U_0 движение носителей обусловлено диффузией. Сила тока в этом случае удовлетворяет соотношению

$$I = -S \left(\frac{\mu kT}{q} \right) \frac{d\rho}{dx},$$

где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Пусть ток между пластинами установился. Предполагая степенную зависимость потенциала от координаты $U(x) = Bx^\beta$, определите значения постоянных B и β . Найдите силу тока. Считайте известными значения параметров U_0, μ, d, q, T и S .

3. Какому сильному неравенству вида

$$U_0 \ll f(q, \mu, T)$$

должно удовлетворять значение потенциала U_0 , чтобы его можно было считать небольшим, как в пункте 3b?

Подсказка

Для установившегося тока $I = \rho v S$ не зависит от x ; связь плотности заряда с потенциалом даёт уравнение Пуассона (теорема Гаусса). Подставьте степенную зависимость и потребуйте постоянства тока.

Ответ

$$1) \alpha = \frac{3}{2}, A = -\frac{U_0}{d^{3/2}}, I = \frac{9}{8} \cdot \frac{\mu \varepsilon_0 S U_0^2}{d^3}; \quad 2) \beta = 3, B = -\frac{U_0}{d^3}, I = -\frac{6 \varepsilon_0 U_0 \mu k T S}{q d^3}; \quad 3) U_0 \ll \frac{kT}{q}.$$

9 Термодинамика жидкости

Коэффициент теплового расширения при постоянном давлении некоторой жидкости равен $\alpha = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta T} = 7,5 \cdot 10^{-4} \text{ К}^{-1}$, сжимаемость этой жидкости при постоянной температуре равна $\beta = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta P} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$, а её молярная теплоёмкость при постоянном объёме равна $c_V = 112 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Эти параметры можно считать постоянными в условиях данной задачи. Внутренняя энергия одного моля рассматриваемой жидкости является функцией двух переменных: молярного объёма V и температуры T и даётся формулой

$$U(V, T) = A_1 T + A_2 V + A_3 VT - pV,$$

где A_1, A_2, A_3 — неизвестные константы, V — молярный объём, $p = p(V, T)$ — молярное давление, являющееся функцией тех же двух переменных V и T .

1. Считая молярный объём V функцией двух переменных: молярного давления p и температуры T , выразите малое изменение dV через малые изменения dp и dT , а также данные в условии постоянные.

- Определите зависимость давления от температуры $p(T)$ в изохорном процессе, считая известным значение давления p_0 при температуре T_0 . Ответ выразите через заданные в условии постоянные, а также параметры p_0 и T_0 .
- Найдите значения постоянных A_1 и A_3 в выражении для внутренней энергии. В этом пункте и в следующих получите числовые ответы.
- Рассмотрев бесконечно малый цикл Карно, совершаемый с жидкостью, определите значение постоянной A_2 в выражении для внутренней энергии.
- Для температуры $T_0 = 300$ К определите значение молярной теплоёмкости при постоянном давлении c_p , если молярный объём жидкости в рассматриваемом состоянии равен $V = 58 \text{ см}^3/\text{моль}$.

Подсказка

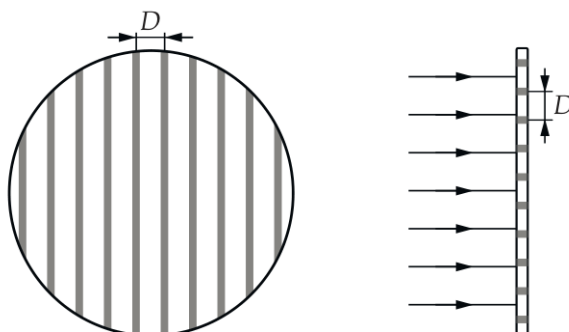
Для изохорного процесса $dV = 0$ и первый пункт сразу даёт связь dp и dT . Для A_2 посчитайте работу и полученное тепло в бесконечно малом цикле Карно (параллелограмм на pV -диаграмме) и сравните с КПД $\Delta T/T$.

Ответ

- 1) $dV = \alpha V dT - \beta V dp$; 2) $p(T) = p_0 + \frac{\alpha}{\beta}(T - T_0)$; 3) $A_1 = c_V = 112 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$, $A_3 = \frac{\alpha}{\beta} \approx 6,8 \cdot 10^5 \text{ Па}/\text{К}$; 4) $A_2 = -\frac{1}{\beta} = -1,1 \cdot 10^9 \text{ Па}$; 5) $c_p = c_V + \frac{\alpha^2 T_0 V}{\beta} \approx 121 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

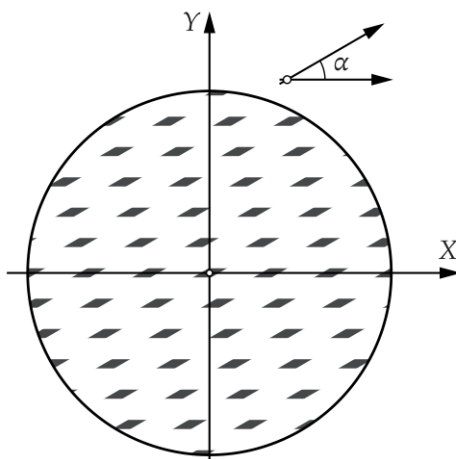
10 Решётки

Дифракционная решётка (см. рисунок ниже) представляет собой непрозрачную пластинку, в которой с пространственным периодом D сделаны N ($N \gg 1$) узких прорезей (штрихов) толщиной h . Обратите внимание, на рисунке прозрачные области показаны серым. В первых двух пунктах этой задачи мы рассматриваем решётки, содержащие $n = 100$ штрихов на миллиметр, считая при этом, что $h = 0,2D$. Решётки располагаются параллельно экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, на расстоянии $L = 3$ м от него. Экраном считается участок вертикальной стены высотой 1 м и шириной 2 м. Решётки освещаются лучом лазерной указки, параметры которой одинаковые для всех пунктов: диаметр пучка $d = 2$ мм, длина волны $\lambda = 532$ нм. В первых двух пунктах свет падает на решётки по нормали. Середины решётки и экрана лежат на одном перпендикуляре к плоскости экрана.



- Пусть штрихи решётки ориентированы вертикально. При нормальном падении лазерного луча на решётку на экране наблюдается система ярких пятен. Сколько всего светлых пятен будет видно на экране? Чему будет равно расстояние между соседними пятнами вблизи центра экрана?

2. Пусть две дифракционные решётки накладываются друг на друга. Штрихи одной решётки располагаются горизонтально, а штрихи другой составляют угол α с горизонтальной прямой. В результате получается непрозрачная пластинка, на которой периодически распределяются прозрачные области в виде параллелограммов. Схематично такая пластинка показана на рисунке ниже, тёмные параллелограммы символизируют прозрачные области.

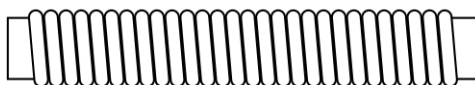


При освещении такой двумерной решётки лазером на экране наблюдается система светлых пятен. Пусть на экране задана система координат YOX , направление осей OY и OX совпадает с направлением осей на рисунке, начало координат находится в центре экрана.

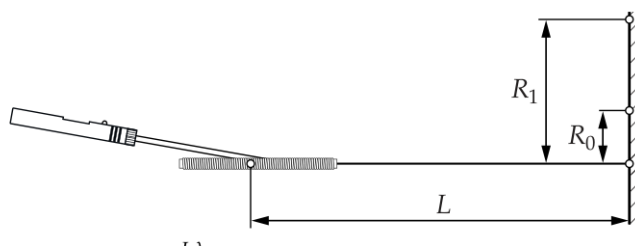
Пусть угол α равен $\frac{\pi}{2}$. Сделайте рисунок, изобразите дифракционную картину. Укажите координаты нескольких светлых пятен на экране, располагающихся вблизи начала координат.

Изобразите схематично дифракционную картину и определите координаты светлых пятен для случая $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$.

3. Гитарная струна с оплёткой представляет собой отражательную дифракционную решётку. Оплётка — это тонкая проволока, навитая в один слой виток к витку на сердечник струны (см. рисунок).



При освещении горизонтально расположенной струны лучом лазерной указки, направленным под небольшим углом к горизонтали (см. рисунок, представленный ниже), на вертикальном экране, находящемся в 2–3 метрах от струны, наблюдается дифракционная картина в виде концентрических полуокружностей. В эксперименте были измерены следующие величины: расстояние от точки падения лазерного луча на струну до стены $L = 2$ м, радиусы первых двух полуокружностей $R_0 = 4$ см, $R_1 = 12,5$ см. «Первых двух» означает наименьшей и следующей по размеру. Использовался тот же лазер, что и в предыдущих пунктах ($\lambda = 532$ нм). Определите по этим данным диаметр проволоки оплётки.



Подсказка

Условие максимума решётки: $D \sin \theta = m\lambda$ при малых углах $x \approx m\lambda L/D$. Две скрещённые решётки перемножаются — картина пятен задаётся двумя наборами целых чисел. Для струны дифракционные максимумы лежат на конусе вокруг оси проволоки.

Ответ

- 1) $\Delta x \approx \frac{L\lambda}{D} \approx 16$ см; 11 пятен; 2) для пересечения под прямым углом: $x = \frac{L\lambda}{D} n$, $y = \frac{L\lambda}{D} m$, где m и n — целые числа; для пересечения под углом α : $x = \frac{n\lambda L}{D} \sin \alpha$, $y = -\frac{n\lambda L}{D} \cos \alpha + \frac{m\lambda L}{D}$; 3) $D \approx 0,3$ мм.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2022/23, заключительный этап, 11 класс — условия (1), условия (2), решения (1), решения (2). Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.