

МОШ, 2022/23, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 Гонки Мёбиуса

На рисунке, представленном ниже, изображена лента Мёбиуса. В нулевой момент времени по ленте одновременно из одной точки начинают двигаться в одном направлении вдоль линии, равноудалённой от краёв, два небольших тела с постоянными скоростями, равными v и αv , где α — безразмерный коэффициент ($\alpha > 1$). Если мысленно разрезать ленту по линии, перпендикулярной линии движения точек, то лента развернётся в полосу длиной L . Параметры v , α , L считаются известными.



1. (3 балла) В какой момент времени t_1 тела впервые встретятся?
2. (4 балла) В какой момент времени t_2 тела впервые встретятся в точке старта, если $\alpha = \frac{5}{3}$?

Подсказка

Длина замкнутой линии движения на ленте Мёбиуса равна не L , а $2L$. Как отличаются пройденные телами пути к моменту встречи?

Ответ

$$1) t_1 = \frac{2L}{(\alpha - 1)v}; \quad 2) t_2 = \frac{6L}{v}.$$

Решение

1а. Расстояния, пройденные телами, в момент первой встречи будут отличаться на $2L$, следовательно,

$$\alpha v t_1 - v t_1 = 2L,$$

откуда находим $t_1 = \frac{2L}{(\alpha - 1)v}$.

1б. N -ая встреча тел произойдёт через время $\frac{2LN}{(\alpha - 1)v}$. За это время тело, которое движется со скоростью v , пройдёт расстояние $\frac{2LN}{\alpha - 1} = 3LN$. Тела впервые встретятся в точке старта при таком минимальном значении N , что $3LN$ окажется кратным $2L$. Нетрудно догадаться, что это произойдёт в момент второй встречи через время $t_2 = \frac{6L}{v}$.

2 Про деталь

Согласно паспорту детали, изготовленной из сплава меди и свинца, её масса равна $m = 1000 \pm 1$ г. Измерив объём детали, рассчитали среднее значение плотности, которое оказалось равным $\rho = 10,0$ г/см³. Сколько грамм меди может содержать в себе деталь, если объём был измерен с погрешностью $\Delta V = 1$ см³? Плотности меди и свинца равны $\rho_{\text{м}} = 8,9$ г/см³ и $\rho_{\text{с}} = 11,3$ г/см³.

Подсказка

Найдите средний объём детали, затем рассмотрите два крайних случая: наименьшая масса при наибольшем объёме и наибольшая масса при наименьшем объёме. В каждом запишите уравнение для суммарного объёма меди и свинца.

Ответ

$m_{\text{min}} = 436$ г; $m_{\text{max}} = 528$ г ($m_{\text{м}} = 482 \pm 46$ г).

Решение

Среднее значение плотности детали равно $\rho = \frac{\bar{m}}{\bar{V}}$, где $\bar{m} = 1000$ г, $\bar{V}$ — значение объёма, полученное в ходе измерения. Откуда находим $\bar{V} = 100$ см³. Так как точность измерения объёма равна 1 см³, объём детали равен $V = 100 \pm 1$ см³. Максимальное значение массы меди, содержащейся в детали, будет в том случае, когда масса детали принимает минимальное значение, а объём максимальное:

$$\frac{m_{\text{max}}}{\rho_{\text{м}}} + \frac{999 \text{ г} - m_{\text{max}}}{\rho_{\text{с}}} = 101 \text{ см}^3,$$

откуда находим $m_{\text{max}} = 528$ г.

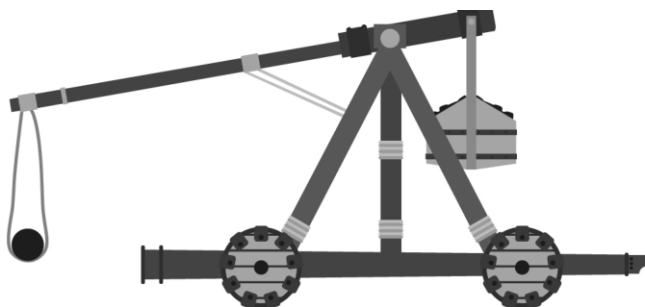
Минимальное значение массы меди найдём из аналогичного уравнения, в котором масса детали принимает максимальное значение, а объём минимальное:

$$\frac{m_{\text{min}}}{\rho_{\text{м}}} + \frac{1001 \text{ г} - m_{\text{min}}}{\rho_{\text{с}}} = 99 \text{ см}^3.$$

Решая это уравнение, получаем $m_{\text{min}} = 436$ г.

3 Модель требушета

Требушет — это метательное орудие, использовавшееся в средние века для осады городов. Тяжёлый груз, закреплённый на коротком конце рычага, разгоняет пращу со снарядом, закреплённую на другом конце рычага до большой скорости, после чего снаряд отделяется от пращи и летит в цель. Ниже вы видите схематичный рисунок. Рассмотрим требушет, все детали, снаряд и противовес которого сделаны из одного материала плотностью ρ . Дальнобойность требушета (в предположении, что сила сопротивления воздуха пренебрежимо мала) может зависеть от следующих размерных параметров: от линейных размеров орудия (например, от высоты H), от плотности материала ρ , из которого сделаны детали орудия, и от ускорения свободного падения g , равного 10 м/с^2 .



На основе соображений размерности определите во сколько раз отличается дальнобойность требушета от дальнобойности его точной копии, все размеры которой в 10 раз меньше. Во сколько раз при таком изменении размеров изменяется максимальная (в процессе выстрела) сила натяжения верёвок, соединяющих рычаг и пращу?

Подсказка

В каких единицах измеряются ρ и g ? Можно ли составить из них одну величину с размерностью длины? Аналогично подумайте, какая комбинация ρ , H , g имеет размерность силы.

Ответ

Дальнобойность уменьшится в 10 раз; сила натяжения уменьшится в 1000 раз.

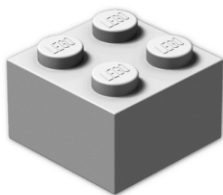
Решение

Перечисленные в условии задачи параметры H , ρ и g в СИ измеряются в м, кг/м^3 и м/с^2 соответственно. Дальнобойность орудия L имеет размерность длины, которая измеряется в метрах. Так как килограмм присутствует только в единице плотности, а секунда только в единице ускорения свободного падения, то, используя эти параметры, мы не сможем в результате получить единицу длины. Следовательно, дальнобойность орудия L может зависеть только от H . Их единицы измерения совпадают, поэтому L пропорционально H . В таком случае дальнобойность точной копии требушета, все размеры которой в 10 раз меньше оригинала, уменьшится тоже в 10 раз.

Для любой силы, действующей в конструкции, $F = \alpha \rho H^3 g$, где α — безразмерный коэффициент. Для силы тяжести это очевидно, но поскольку размерность силы получается единственным способом $\rho H^3 g$, то для разных сил мы будем получать одинаковую зависимость от ρ , H и g с разными коэффициентами α . Это и сила давления требушета на землю, и сила растяжения верёвки при выстреле, и сила, действующая на ось рычага. Таким образом, мы получаем, что максимальная (в процессе выстрела) сила натяжения верёвок, соединяющих рычаг и пращу, уменьшится в 1000 раз.

4 LEGO

Ребёнок хочет собрать устойчивую башню, используя минимальное количество LEGO кирпичиков размером 2×2 (см. рисунок ниже). Детали он ставит либо строго одну на другую, чтобы все штырьки нижнего кирпичика вошли в соответствующие отверстия верхнего кирпичика, либо сдвигает из этого положения вправо или влево на расстояние, равное половине длины детали. На каждом ярусе башни содержится не более одной детали конструктора. Если линия действия результирующей силы тяжести попадает на границу основания башни, то она опрокидывается. Детали хорошо крепятся друг к другу.



1. (3 балла) Какое количество LEGO кирпичиков использовал ребёнок, если он построил устойчивую башню, при этом оказалось, что верхняя и нижняя детали сдвинуты друг относительно друга по горизонтали на расстояние, равное удвоенной длине кирпичика?
2. (4 балла) На каком максимально возможном расстоянии друг от друга по горизонтали могут находиться верхняя и нижняя детали, если ребёнок использовал 11 кирпичиков?

В качестве ответов на вопросы приведите схематичные рисунки башен с краткими пояснениями.

Подсказка

Чтобы сдвиг был нужным при наименьшем числе кирпичиков, сначала кладите их со сдвигом в одну сторону, а затем в другую, создавая противовес. Устойчивость проверяйте по моментам сил относительно края основания.

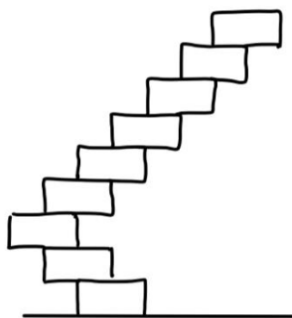
Ответ

1) 9 кирпичиков (схема — на рисунке в решении); 2) $2,5a$, где a — длина кирпичика (схема — на рисунке в решении).

Решение

Чтобы построить башню с заданным сдвигом верхней и нижней деталей, используя при этом минимальное количество кирпичиков, ребёнку сначала надо укладывать их со сдвигом влево, создав максимально возможный противовес, а потом со сдвигом вправо (или наоборот).

4а. На рисунке представлена башня, содержащая 9 кубиков, у которой верхняя и нижняя детали сдвинуты друг относительно друга по горизонтали на расстояние, равное удвоенной длине кирпичика.



Проверим, является ли она устойчивой. Пусть a — это длина детали. Момент сил, удерживающих башню в устойчивом положении, равен

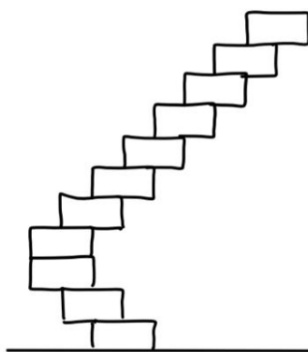
$$2mg \cdot \frac{a}{2} + 2mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} = \frac{9}{2} mga.$$

Момент сил, опрокидывающих башню, равен

$$mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} = 3 mga.$$

Следовательно, башня устойчива.

4б. На втором рисунке представлена башня, содержащая 11 кубиков, у которой верхняя и нижняя детали сдвинуты друг относительно друга по горизонтали на расстояние $2,5a$.



Эта башня является устойчивой, поскольку момент сил, удерживающих башню от падения, равен

$$2mg \cdot \frac{a}{2} + 2mg \cdot a + 2mg \cdot \frac{3a}{2} = 6 mga,$$

а момент сил, опрокидывающих башню, равен

$$mg \cdot \frac{a}{2} + mg \cdot a + mg \cdot \frac{3a}{2} + mg \cdot 2a = 5 mga.$$

Другие конфигурации башен из 11 кубиков дают либо меньший сдвиг верхней и нижней деталей, либо являются неустойчивыми.

Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2022/23, заключительный этап, 7 класс — условия, решения.
Задачи перенесены на botay.pro, решения — по официальным.