

МОШ, 2022/23, заключительный этап, 8 класс

Условия, ответы и решения

1 Маятник

Небольшое тело, подвешенное на твёрдом стержне в поле силы тяжести, способно совершать колебательное (повторяющееся) движение, если отклонить его из положения равновесия на небольшой угол и отпустить. *Математическим маятником* называется физическая модель, описывающая процесс колебаний груза на стержне, в которой тело считается материальной точкой, масса стержня, а также все силы трения и сопротивления движению считаются пренебрежимо малыми. Время, затрачиваемое маятником на одно колебание, иначе говоря, на возвращение в исходную точку, называется периодом.

- (2 балла) Рассмотрим следующие размерные параметры: длина стержня маятника L , масса тела m и ускорение свободного падения g , равное $9,8 \text{ м/с}^2$. Исходя из соображений размерности, определите от каких параметров зависит период колебаний математического маятника. Во сколько раз изменится период колебаний маятника, если уменьшить длину подвеса в 4 раза?
- (4 балла) Заданный интервал времени (например, минута), измеряемый маятниковыми часами, пропорционален периоду колебаний маятника. Рассмотрим маятниковые часы, в устройство которых входит маятник длиной $L = 1 \text{ м}$, сделанный из стали. При такой длине движение маятника в одну сторону занимает $1,00 \text{ с}$. Известно, что при температуре окружающей среды $t_1 = 5^\circ\text{C}$ часы показывают точное время. На сколько отстанут за сутки часы при температуре $t_2 = 25^\circ\text{C}$? Линейное тепловое расширение тел описывается формулой $L = L_0 (1 + \alpha(t - t_0))$, где L и L_0 — размер тела при температурах t и t_0 соответственно, α — постоянный коэффициент линейного расширения, равный для стали $\alpha = 12,5 \cdot 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{C}$.
- (4 балла) Как должен быть устроен подвес маятника, чтобы период колебаний не менялся при изменении температуры? Считается, что в своей конструкции вы можете соединять стержни, сделанные из двух разных материалов, коэффициенты линейного расширения которых равны α и 2α . В качестве ответа приведите схематичный рисунок с краткими пояснениями.

Указание. Может оказаться полезной приближённая формула $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$, верная при $|x| \ll 1$.

Подсказка

В каких единицах измеряется период и какая единственная комбинация L , m , g даёт секунды? Отставание часов найдите через относительное изменение периода. Для пункта в: подвес должен сохранять эффективную длину, поэтому удлинение стержней в одну сторону компенсируйте удлинением в другую.

Ответ

1) $T \sim \sqrt{L/g}$, от массы не зависит, период уменьшится в 2 раза; 2) $\Delta T \approx T \frac{\alpha \Delta t}{2} \approx 10,8 \text{ с}$ (где $T = 86400 \text{ с}$); 3) подвес из трёх стержней одинаковой длины (два из материала с α , один из материала с 2α), соединённых как на рисунке.

Решение

а. Перечисленные в условии задачи параметры L , m и g в СИ измеряются в м, кг и м/с² соответственно. Период маятника T имеет размерность времени, которое измеряется в секундах. Существует лишь одна комбинация параметров L , m и g , которая даёт величину, измеряемую в секундах: $\sqrt{L/g}$. Следовательно, если уменьшить длину подвеса в 4 раза, то период колебаний уменьшится в 2 раза.

б. Вследствие удлинения маятника при нагревании увеличивается период его колебаний. Часы за сутки отстанут на время $\Delta T = N(T_2 - T_1)$, где N — число колебаний маятника за сутки при температуре 25 °С, а T_1 и T_2 — периоды колебаний маятника при температурах 5 °С и 25 °С соответственно. Найдём ΔT , воспользовавшись приближённой формулой, приведённой в условии задачи:

$$\Delta T = N(T_2 - T_1) = \frac{T}{T_2}(T_2 - T_1) = T \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T \left(1 - \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{L(1 + \alpha \Delta t)}}\right) \approx T \frac{\alpha \Delta t}{2} = 10,8 \text{ с},$$

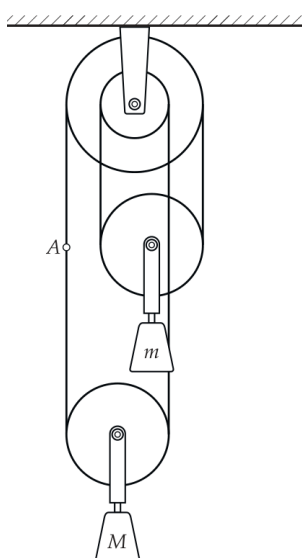
где $T = 86400 \text{ с}$.

в. Принципиальная схема устройства подвеса маятника приведена на рисунке. Коэффициенты линейного расширения крайних стержней и среднего стержня равны α и 2α соответственно. Длины стержней одинаковы. Соединительные перемычки имеют пренебрежимо малую длину.



2 Равновесие системы блоков

Система, изображённая на рисунке, состоит из двух подвижных блоков, одного неподвижного двухступенчатого блока, двух грузов и нити. Двухступенчатый блок состоит из лёгких, жёстко соединённых дисков с общей осью, диаметры которых равны 15 см и 30 см. Массы грузов равны $m = 1$ кг и $M = 3$ кг. Массами нитей и блоков, а также трением в осях блоков можно пренебречь, нить не проскальзывает по поверхностям блоков.



1. (3 балла) Пусть в точке A к нити приложена такая сила F , что система находится в равновесии. Куда направлена и чему равна эта сила?
2. (4 балла) Можно ли привести систему в состояние равновесия, действуя с некоторой вертикальной силой на нить в точке A , если поверхность двухступенчатого блока гладкая (так что нить по ней проскальзывает)? Ответ объясните.

Подсказка

Запишите условия равновесия подвижных блоков, чтобы найти натяжения участков нити, а затем уравнение моментов для двухступенчатого блока относительно его оси. Во втором пункте подумайте, какие силы на него тогда действуют.

Ответ

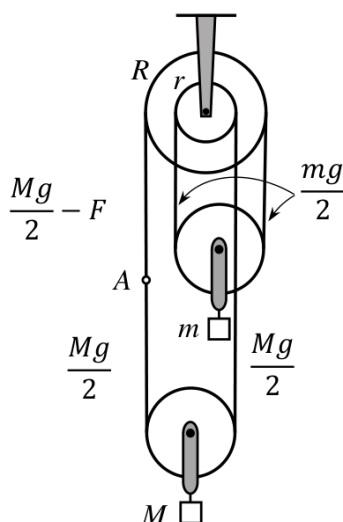
- 1) $F = \frac{R-r}{2R}(M-m)g = 5$ Н, направлена вверх; 2) невозможно.

Решение

а. Способ 1. Предположим, что сила $\vec{F}$ направлена вверх. Запишем условия равновесия подвижных блоков:

$$\begin{aligned} 2T_1 &= Mg \implies T_1 = \frac{Mg}{2}, \\ 2T_2 &= mg \implies T_2 = \frac{mg}{2}, \end{aligned}$$

где T_1 и T_2 — натяжения участков нити, примыкающих к нижнему и верхнему подвижным блокам соответственно. На рисунке указаны силы натяжения различных участков нити.



Найдём силу F из уравнения моментов для двухступенчатого блока относительно оси, на которую он насажен:

$$\frac{mg}{2}r + \left(\frac{Mg}{2} - F\right)R = \frac{Mg}{2}r + \frac{mg}{2}R \Rightarrow F = \frac{R-r}{2R}(M-m)g = 5 \text{ Н.}$$

Сила F оказалась положительной, следовательно, наше предположение насчёт её направления оказалось верным.

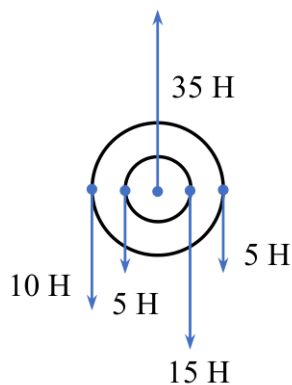
Способ 2. Запишем уравнение моментов относительно оси двухступенчатого блока для всей системы:

$$FR + mg\left(\frac{R+r}{2} - r\right) = Mg\left(\frac{R+r}{2} - r\right),$$

откуда находим

$$F = \frac{R-r}{2R}(M-m)g = 5 \text{ Н.}$$

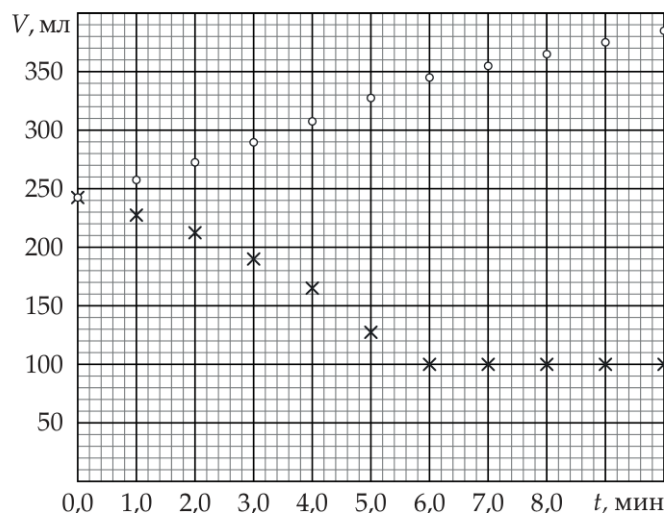
б. На двухступенчатый блок (и примыкающие к нему участки нити) действуют силы, изображённые на рисунке. Такое возможно, если между поверхностью блока и примыкающими участками нити действуют силы трения. При малых значениях коэффициента трения система не может находиться в состоянии покоя. Если точка A нити остаётся на месте (это возможно, если сильно сжать её), груз массой M движется вниз, массой m — вверх, а нить проскальзывает по поверхности двухступенчатого блока.



3 Вода и масло

Цилиндрический сосуд с нанесённой на боковую поверхность мерной шкалой частично заполнен водой, в которой плавает выпуклая пластиковая игрушка. В сосуд начинают добавлять масло, которое течёт тонкой струйкой с постоянной скоростью μ , измеряемой в мл/с.

Каждую минуту с помощью мерной шкалы определяют два значения объёма, соответствующие положению уровня поверхности воды и масла. Результаты измерений показаны на графике, представленном ниже. В процессе эксперимента жидкости не смешиваются.



Маркеры одной формы (кружки или крестики) соответствуют одной из жидкостей. Плотность воды равна 1 г/см^3 , плотность масла меньше плотности воды.

1. (2 балла) Чему равна скорость μ ?
2. (6 баллов) Определите плотность масла.

Подсказка

Выясните, какие маркеры относятся к воде: как меняется погружённый в воду объём игрушки по мере добавления масла? Затем сравните условие плавания в начале и в конце опыта.

Ответ

1) $\mu = 0,17 \text{ мл/с}$; 2) $\rho_{\text{м}} = 0,77 \text{ г/см}^3$.

Решение

а. Количество масла в сосуде с течением времени увеличивается, следовательно, сила Архимеда, действующая на пластиковую игрушку со стороны масла, возрастает. Из-за этого уменьшается объём игрушки, погружённый в воду, и уровень воды в сосуде понижается. Значит, крестиками на графике обозначены измерения, связанные с водой, а кружочками — с маслом. В момент времени $t = 6 \text{ мин}$ уровень воды прекращает изменяться, а уровень масла повышается с постоянной скоростью, значит, объёмы воды и масла, вытесненные игрушкой, перестают изменяться. По графику определим изменение объёма масла за последние 4 минуты измерений: $\Delta V_{\text{м}} = 40 \text{ мл}$. Скорость μ равна $\Delta V_{\text{м}} / \Delta t$, где $\Delta t = 4 \text{ мин}$. Подставив числовые значения, находим $\mu = 10 \text{ мл/мин} = 0,17 \text{ мл/с}$.

б. Обозначим объёмы игрушки, погружённые в воду, в начальный и конечный моменты времени как V_1 и v_1 соответственно. Тогда $V_1 - v_1 \approx 243 \text{ мл} - 100 \text{ мл} = 143 \text{ мл}$. Разность объёмов, измеренных в момент времени $t = 6 \text{ мин}$, равна $\mu t + V_2$, где μt — объём масла в сосуде к моменту времени $t = 6 \text{ мин}$, V_2 — объём вытесненного масла. Откуда находим $V_2 = 245 \text{ мл} - 10 \text{ мл/мин} \cdot 6 \text{ мин} = 185 \text{ мл}$.

Силу тяжести, действующую на игрушку, в начальный момент времени компенсирует сила Архимеда $\rho_{\text{в}} g V_1$, а в конечный момент — $\rho_{\text{м}} g V_2 + \rho_{\text{в}} g v_1$, где $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{м}}$ — плотности воды и масла соответственно. Следовательно,

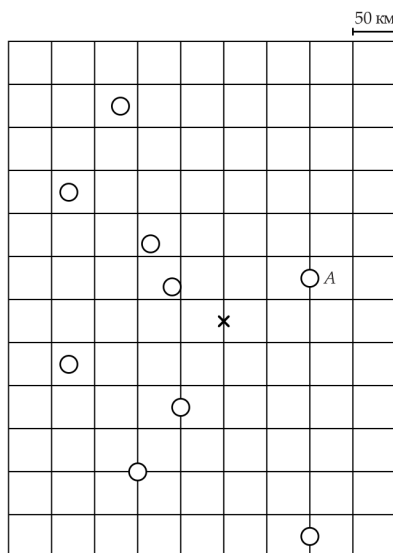
$$\rho_{\text{м}} = \frac{V_1 - v_1}{V_2} \rho_{\text{в}} = 0,77 \text{ г/см}^3.$$

4 Передвижение вертолѐта

Вертолѐт летит с постоянной по модулю скоростью 200 км/ч . На рисунке, представленном ниже, изображено положение вертолѐта (крестик) относительно населѐнного пункта A и остальных населѐнных пунктов (кружки) в $12:00$. Известно, что вертолѐт движется на одной высоте над Землёй по траектории, состоящей из прямолинейных участков. В таблице, приведѐнной ниже, указано расстояние L от пункта A до точки, где находится вертолѐт в разные моменты времени.

Время	12:30	13:00	13:30	14:00
L , км	150	225	250	300

Пользуясь увеличенным рисунком, представленным на дополнительном листе, а также циркулем и линейкой, ответьте на следующие вопросы.



1. (3 балла) Пусть известно, что вертолѐт не менял направление полѐта с $12:00$ до $12:30$. В какое самое раннее время он мог пролететь над каким-либо населѐнным пунктом? Над каким именно населѐнным пунктом он бы при этом пролетел?
2. (7 баллов) Пусть известно, что вертолѐт менял направление полѐта только один раз в $13:00$. В каком населѐнном пункте оказался вертолѐт в $14:00$?

Все построения делайте на увеличенном рисунке, представленном на дополнительном листе. Искомые города пометьте, например, «галочкой». Кратко опишите ваши рассуждения и последовательность построений.

Подсказка

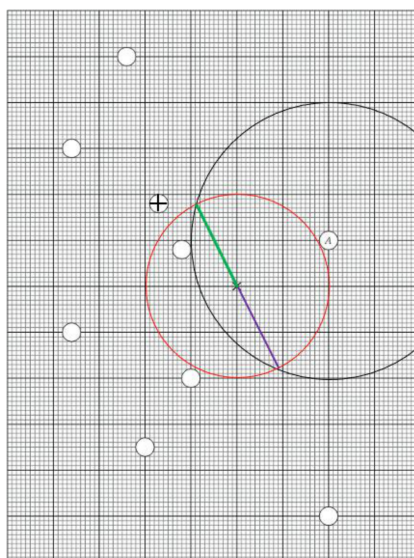
За полчаса вертолёт пролетает 100 км, то есть лежит на окружности радиуса 100 км вокруг своего положения в начале интервала. Одновременно он лежит на окружности вокруг A с радиусом из таблицы. Пересечения окружностей дают возможные положения.

Ответ

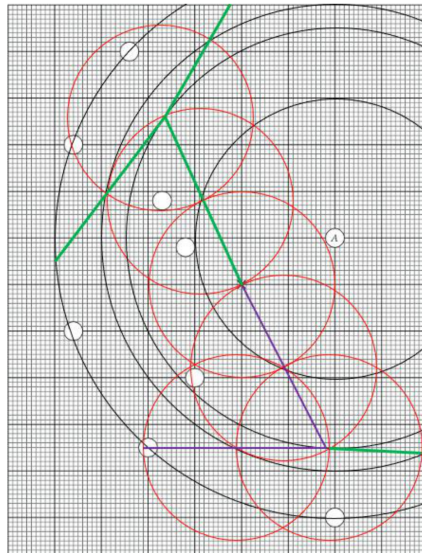
1) вертолёт пролетит над населённым пунктом, отмеченным на рисунке решения крестиком, с 12:39 до 12:45 (самое раннее время — 12:39); 2) населённый пункт, в который приходит траектория, показанная на рисунке решения фиолетовым цветом.

Решение

а. Нарисуем окружность (чёрная) радиусом 150 км (30 маленьких клеточек), центр которой совпадает с центром пункта A . Изобразим ещё одну окружность (красная) радиусом 100 км (20 маленьких клеточек), центр которой совпадает с положением вертолёта в 12:00. Пересечения этих окружностей — это два возможных расположения вертолёта в момент времени 12:30. В пункт, который расположен ближе всего к одной из этих точек, вертолёт долетит за минимальное время. Этот пункт на рисунке отмечен крестиком. Расстояние от центра населённого пункта до положения вертолёта в 12:30 равно 8 клеточкам. Диаметр населённого пункта равен 4 клеточкам. Следовательно, вертолёт будет лететь над этим населённым пунктом с 12:39 до 12:45.



б. На рисунке изображены 4 чёрные окружности радиусами 150 км, 225 км, 250 км и 300 км, центры которых совпадают с центром пункта A , и красные окружности радиусом 100 км, которые показывают, где мог бы оказаться вертолёт через 30 минут. Возможны 4 траектории перемещения вертолёта, одна из которых попадает в искомый населённый пункт. Данная траектория изображена фиолетовым цветом.



Источник: Московская олимпиада школьников по физике, 2022/23, заключительный этап, 8 класс — условия, решения.
Задачи перенабраны на botay.pro, решения — по официальным.