

МОШ, 2023/24, заключительный этап, 10 класс

Условия, ответы и решения

1 Стержень на плоскости

Однородный стержень массой m движется по плоскости так, что в некоторый момент времени абсолютные значения ускорений концов A и B стержня оказываются равны $a_A = 2a_0$ и $a_B = a_0$, при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, а векторы скоростей концов равны друг другу. Какая внешняя сила действует на стержень в данный момент времени? Определите модуль и направление вектора силы.

Подсказка

Если скорости всех точек стержня равны, то проекции их ускорений на стержень тоже должны совпадать. Что это говорит о направлении ускорений? Затем воспользуйтесь теоремой о движении центра масс.

Ответ

$\frac{3}{2}ma_0$ или $\frac{1}{2}ma_0$; вектор силы направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}_A$.

Решение

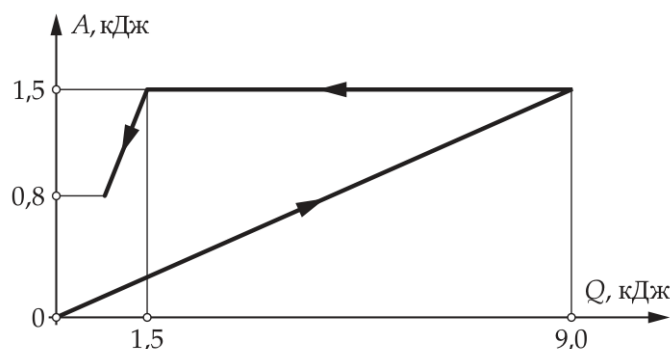
Векторы скоростей всех точек твёрдого стержня в рассматриваемый момент времени равны друг другу. Чтобы через малое время Δt проекции скоростей всех точек на направление стержня по-прежнему оставались одинаковыми, проекции ускорений на направление стержня тоже должны быть одинаковыми. Абсолютные значения ускорений концов стержня различны, но при этом ускорения направлены вдоль параллельных прямых, поэтому векторы ускорений могут давать одинаковую проекцию на направление стержня только в том случае, если векторы ускорений перпендикулярны стержню.

Перейдём в инерциальную систему отсчёта, в которой в данный момент времени стержень покоится. Ускорения точек стержня не изменят своего значения и направления. Через бесконечно малый промежуток времени Δt скорости точек стержня будут перпендикулярны стержню и скорость точки A будет вдвое больше скорости точки B . Скорости остальных точек стержня будут пропорциональны расстоянию до мгновенного центра вращения. Пусть на стержне это точка O , тогда ускорения точек в начале интервала времени Δt должны быть тоже пропорциональными расстоянию до точки O стержня. Проведём прямые через начала ускорений $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$ и через их концы. Точка стержня, которая лежит на пересечении этих прямых, имеет нулевое ускорение (точка O). Найдём ускорение центра масс стержня. Если ускорения точек A и B направлены в одну сторону, то ускорение центра масс равно $\frac{3}{2}a_0$ и совпадает с направлением векторов $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_B$. Если ускорения точек A и B направлены в разные стороны, то ускорение центра масс равно $\frac{1}{2}a_0$ и совпадает с направлением вектора $\vec{a}_A$. Результирующую силу, действующую на стержень, найдём, воспользовавшись теоремой о движении центра масс. В итоге получаем, что на стержень действует либо сила $\frac{3}{2}ma_0$, либо сила $\frac{1}{2}ma_0$. В обоих случаях вектор силы направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{a}_A$.

2 Термодинамический цикл

Состояние одного моля идеального двухатомного газа изменяется в цикле, состоящем из процессов с постоянной теплоёмкостью. На рисунке, представленном ниже, изображён график зависимости работы, совершаемой газом, от количества теплоты, полученного или отданного им при достижении текущего состояния.

1. Определите КПД цикла.
2. Чему равна минимальная температура газа в этом циклическом процессе, если максимальная температура равна 481 К?



Примечание. Квазистатический процесс, при котором молярная теплоёмкость газа c остаётся постоянной, описывается соотношением

$$PV^{\frac{c-c_P}{c-c_V}} = \text{const},$$

где P и V — давление и объём соответственно, c_V и $c_P = c_V + R$ — это молярные теплоёмкости при постоянном объёме и давлении.

Подсказка

КПД — это работа за цикл, делённая на всё подведённое тепло. Для участка с постоянной теплоёмкостью c из первого начала получите связь A и Q и найдите c на каждом участке графика.

Ответ

$$1) \eta = \frac{A}{Q_+} \approx 8,9\%; \quad 2) T_{\min} = 120 \text{ К}.$$

Решение

Используя график, находим КПД цикла

$$\eta = \frac{A}{Q_+} = \frac{0,8 \text{ кДж}}{9,0 \text{ кДж}} = 8,9\%,$$

где A — работа, совершённая газом за цикл, Q_+ — подведённое к газу количество теплоты.

Найдём теплоёмкость газа в процессе, который описывается уравнением $A = \frac{1}{6}Q$ (прямолинейный участок, проходящий через начало координат). Запишем первое начало термодинамики для процесса с постоянной теплоёмкостью

$$c \Delta T = c_V \Delta T + A,$$

откуда получим следующее соотношение

$$A = (c - c_V) \Delta T = \frac{c - c_V}{c} Q.$$

Следовательно, $\frac{c_1 - c_V}{c_1} = \frac{1}{6}$, откуда имеем равенство $c_1 = \frac{6}{5} c_V = 3R$.

Зная теплоёмкость газа, найдём изменение температуры в этом процессе

$$Q = 3R \Delta T_1 \Rightarrow \Delta T_1 = \frac{9 \text{ кДж}}{3 \cdot 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}} = 361 \text{ К}.$$

Во втором процессе работа газа равна нулю, поэтому для него справедлива формула $Q = c_V \Delta T_2$, из которой следует

$$\Delta T_2 = -\frac{7,5 \text{ кДж}}{\frac{5}{2} \cdot 8,3 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}} = -361 \text{ К}.$$

В начале и в конце третьего процесса с постоянной теплоёмкостью температуры газа равны, следовательно, это изотермический процесс.

Минимальная температура газа в цикле равна

$$T_{\min} = T_{\max} + \Delta T_2 = 481 \text{ К} - 361 \text{ К} = 120 \text{ К}.$$

3 Мартышка тянет удава

Удав выпрямился, лежа на горизонтальной поверхности, расслабился и не сопротивляется совсем. Его масса M равномерно распределена по его длине L . Поверхность гладкая, и по ней рядом с удавом и параллельно ему проложена тропинка (не гладкая) для прогулок. Мартышка, находясь на этой тропинке, схватила удава за кончик его хвоста и потащила этот конец удава в направлении к его голове. При этом удав целиком лежит на поверхности. Сила F , с которой мартышка тянет хвост удава, горизонтальна и меняется в зависимости от времени t по закону $F = At$, где A — это известная постоянная величина.

1. С какой скоростью двигался кончик хвоста удава в тот момент, когда расстояние от него до головы удава впервые стало равно $\frac{L}{2}$?
2. Через какое время хвост удава поравняется с неподвижной головой удава?
3. Какой будет скорость всего удава в тот момент, когда его голова придёт в движение?

Указание. Может оказаться полезной формула

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}), \quad n \neq -1.$$

Подсказка

Двигается только та часть удава, до которой уже «дошёл» хвост, и её масса растёт. Запишите импульс этой части через смещение X кончика хвоста и приравняйте скорость его изменения силе.

Ответ

$$1) \frac{dX}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{8M} \right)^{1/3}; \quad 2) t(L) = \left(\frac{3LM}{2A} \right)^{1/3}; \quad 3) \frac{dX}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{2M} \right)^{1/3}.$$

Решение

К некоторому моменту времени кончик хвоста удава переместился на расстояние X . В этот момент импульс удава (той его части, которая уже пришла в движение) равен

$$P = \frac{M}{L} \cdot \frac{X}{2} \cdot \frac{dX}{dt} = \frac{M}{4L} \cdot \frac{d(X^2)}{dt}.$$

Скорость изменения импульса равна силе

$$\frac{dP}{dt} = \frac{M}{4L} \cdot \frac{d\left[\frac{d(X^2)}{dt}\right]}{dt} = At.$$

Интегрируем уравнение два раза по времени и получаем соотношение

$$X^2 \frac{M}{4L} = \frac{At^3}{6} + C_1 t + C_2.$$

Здесь C_1 — константа, связанная со скоростью кончика хвоста в начальный момент, а C_2 — это константа, зависящая от начальной координаты кончика хвоста. В начальный момент времени и скорость V_0 , и смещение X_0 кончика хвоста удава равны нулю. Отсюда следует, что $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, поэтому справедлива формула

$$X^2 \frac{M}{4L} = \frac{At^3}{6}. \quad (1)$$

Смещение X связано со временем t так:

$$X(t) = \sqrt{\frac{2AL}{3M}} \cdot t^{3/2}.$$

А скорость кончика хвоста так:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{2AL}{3M}} \cdot t^{1/2}$$

или

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} \cdot t^{1/2}. \quad (2)$$

Для ответа на первый вопрос нужно найти время, когда $X = \frac{L}{2}$. Подставляем это значение X в формулу (1) и получаем

$$t = \left(\frac{3ML}{8A}\right)^{1/3}.$$

Подставим найденное значение времени в формулу для скорости (2), имеем

$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} \cdot \left(\frac{3ML}{8A}\right)^{1/6}$$

или

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{8M}\right)^{1/3}.$$

Для ответа на второй вопрос нужно в формулу (1) подставить значение $X = L$:

$$t(L) = \left(\frac{3LM}{2A}\right)^{1/3}.$$

Для ответа на третий вопрос нужно в формулу (1) подставить значение $X = 2L$ и получить значение времени, а затем полученное значение времени подставить в формулу (2). Сначала получится соотношение

$$t(2L) = \left(\frac{6LM}{A} \right)^{1/3},$$

а затем ответ:

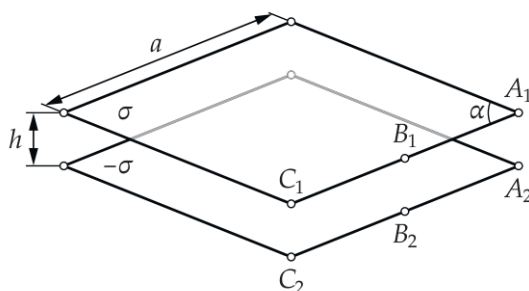
$$\frac{dX}{dt} = \sqrt{\frac{3AL}{2M}} \cdot \left(\frac{6LM}{A} \right)^{1/6}$$

или

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{9AL^2}{2M} \right)^{1/3}.$$

4 Разности

Две одинаковые плоские диэлектрические пластины, заряженные равномерно по поверхности с плотностью σ и $-\sigma$, располагаются параллельно друг другу на небольшом расстоянии h (см. рисунок). Каждая пластина имеет форму ромба с острым углом α ($\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$) и длиной стороны a ($a \gg h$). Любая вершина верхней пластины и ближайшая к ней вершина нижней пластины лежат на общем перпендикуляре к плоскостям пластин.



1. Найдите разность потенциалов центров пластин. Центром ромба считается точка пересечения его диагоналей.
2. Определите разность потенциалов середин близлежащих сторон пластин (точки B_1 и B_2).
3. Чему равна разность потенциалов вершин ромбов A_1 и A_2 ? А разность потенциалов вершин C_1 и C_2 ?

Подсказка

Вдали от краёв поле внутри конденсатора однородно. У края поле искажается, но его нормальную составляющую можно найти из симметрии: сложите несколько одинаковых конденсаторов так, чтобы их края (или углы) совпали и составили полную картину.

Ответ

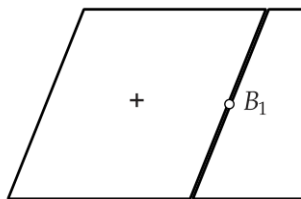
$$1) \Delta\varphi_0 = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}; \quad 2) \Delta\varphi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}; \quad 3) \Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}, \Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi - \alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Решение

1) Внутри конденсатора, вдали от его краёв поле можно считать однородным и равным $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Разность потенциалов центров пластин равна $\Delta\varphi_0 = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0}$.

2) Вблизи края конденсатора электрическое поле искривляется. Вертикальная составляющая напряжённости поля вблизи края конденсатора может быть найдена на основе соображений симметрии. Обозначим $E_B^{(\perp)}$ составляющую напряжённости электрического поля вблизи точки B , перпендикулярную пластинам конденсатора. Совместим два одинаковых конденсатора, так чтобы совпадали их края (см. рисунок, вид сверху).



Напряжённость поля вблизи точки B_1 внутри составного конденсатора будет равна $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. С другой стороны, эта напряжённость равна $2E_B^{(\perp)}$, поэтому $E_B^{(\perp)} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, а искомая разность потенциалов равна $\Delta\varphi^{(B)} = \frac{\sigma h}{2\varepsilon_0}$.

3) Рассмотрим конденсаторы, обкладки которых представляют собой ромбы с малым углом при вершине. Пусть для примера этот угол равен 1° . Совместим острыми углами 360 таких конденсаторов. Тогда на основе соображений симметрии, рассуждая аналогично предыдущему пункту, можно найти перпендикулярную обкладкам составляющую напряжённости электрического поля внутри конденсатора вблизи угла, получится значение $E^{(\perp)} = \frac{\sigma}{360\varepsilon_0}$. Отсюда следует, что для конденсатора с обкладками в виде ромбов с углом φ перпендикулярная обкладкам составляющая напряжённости электрического поля равна

$$E_C^{(\perp)} = \frac{\sigma\varphi}{2\pi\varepsilon_0}, \quad (1)$$

где угол φ измеряется в радианах. На основании формулы (3) легко находим искомые разности потенциалов:

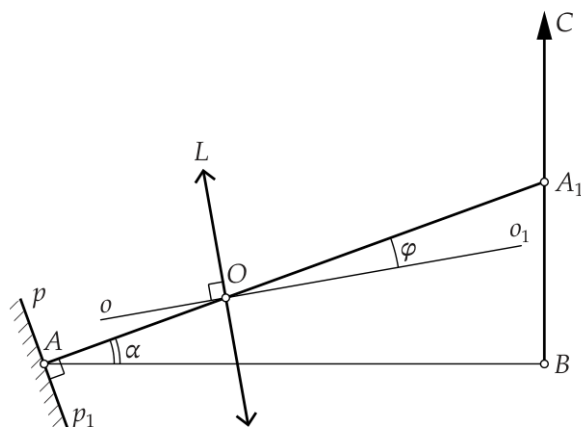
$$\Delta\varphi^{(A)} = \frac{\sigma\alpha h}{2\pi\varepsilon_0}, \quad \Delta\varphi^{(C)} = \frac{\sigma(\pi - \alpha)h}{2\pi\varepsilon_0}.$$

Если найденные значения отличаются от приведённых выше только знаком, то они всё равно считаются верными.

5 Tilt-Shift

Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съёмки). Наклон оптической оси даёт возможность получать резкие изображения протяжённых предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата.

На упрощённой схеме, представленной на рисунке, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива oo_1 отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC , pp_1 — плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или плёнка, если речь идёт о плёночной камере).



Пусть известны расстояние $AB = 5$ м по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50$ мм, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближённые соотношения $\sin \beta \approx \beta$, $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$, $\cos \beta \approx 1$.

Подсказка

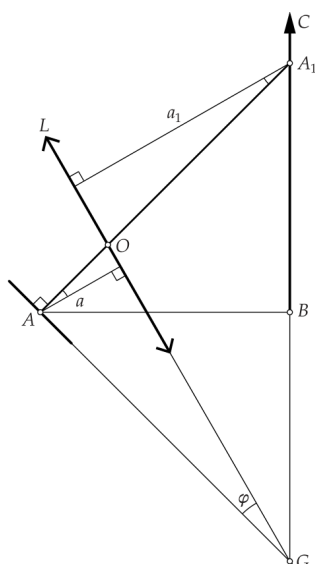
Изображение предмета лежит в плоскости матрицы, если плоскость предмета, плоскость матрицы и плоскость линзы пересекаются в одной точке. Найдите расстояние от точки A до линзы по формуле линзы.

Ответ

$$\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ, \text{ где } L = AB.$$

Решение

Для того, чтобы изображение предмета получалось наиболее резким, необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC , отрезок, символизирующий плоскость плёнки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости плёнки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (см. рисунок). Искомый угол φ отмечен дугой на рисунке; a и a_1 — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу.



Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}. \quad (1)$$

При этом, поскольку искомый угол φ мал ($\cos \varphi \approx 1$), справедливы равенства $a \approx AO$ и $a_1 \approx A_1O$, и как следствие, равенство

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos \alpha} = L\sqrt{2}, \quad (2)$$

в котором введено обозначение $L = AB$.

Решая уравнения (4) и (5) как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу

$$a = \frac{L\sqrt{2}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{L} \cdot \frac{1}{2}} \right) \approx L\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}f}{4 \cdot 2L} = f. \quad (3)$$

При записи последней цепочки равенств была использована приближённая формула $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, справедливая при малых x ($|x| \ll 1$). Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, отрезки AA_1 и AG равны, при этом $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$. Таким образом, как следует из формулы (6), искомый угол равен

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ.$$