

МОШ, 2023/24, заключительный этап, 11 класс

Условия и ответы

1 График потенциала

Три одинаковых тонких диска радиусом R , однородно заряженных с поверхностной плотностью σ , 2σ и -3σ , расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0 , d и $2d$, где $d = \frac{R}{1000}$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ , равен 1000 В. Потенциал бесконечно удалённой точки считается равным нулю.

а) (2 балла) Получите формулу $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединённого однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете её вывести.

б) (4 балла) Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси OX , от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a , принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

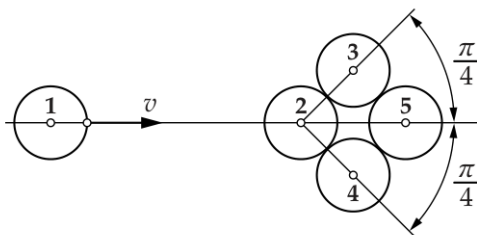
Ответ

а) формула выводится суммированием потенциалов колец, на которые разбит диск; б) $\varphi(a) = (4 - 2a)$ В при $0 < a \leq 1$ и $\varphi(a) = (8 - 6a)$ В при $1 < a \leq 2$ (ломаная от 4 В через 2 В при $a = 1$ до -4 В при $a = 2$).

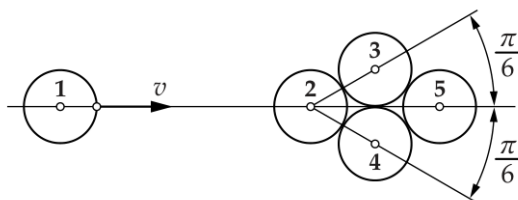
2 Аэрохоккей

Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

а) (2 балла) В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



б) (6 баллов) В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

Ответ

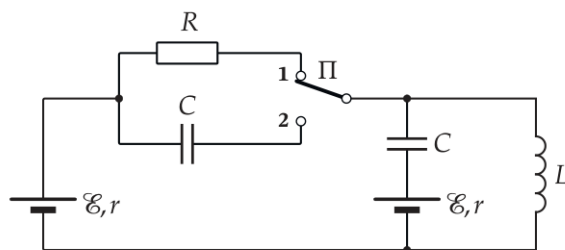
а) $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ м/с; б) $v_1 = \frac{v}{5} = 0,2$ м/с, $v_2 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60$ м/с, $v_5 = \frac{12v}{25} = 0,48$ м/с.

3 С двумя батарейками

В цепи, схема которой изображена на рисунке, представленном ниже, параметры $\mathcal{E}$, L , C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, \quad rC \ll \sqrt{LC}, \quad RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель Π находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединённом с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.



а) (6 баллов) Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.

б) (2 балла) Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2.

Ответ

а) $t_L = \frac{3\pi}{4}\sqrt{2LC}$; б) $Q = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}$.

4 Накачивая шину

В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объём камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно P_0 при температуре окружающей среды T_0 . После накачивания воздух в камере должен создавать давление P при той же температуре T_0 . Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2,5R$).

а) (6 баллов) В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объёма V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении $P_{\max}$ ($P_{\max} > P$), что после заполнения камеры и её охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равно P . Ниппель пропускает воздух в камеру, до тех пор пока давление в ней не сравняется с давлением в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает.

«Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений $P_{\max}$ и $T_{\max}$. Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0 , давление в камере становится равно P .

Считая известными значения $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па, определите $P_{\max}$ и $T_{\max}$.

б) Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объёмом V_C ($V_C \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0 . Пусть в начале i -го цикла давление в камере равно P_{i-1} . На i -м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления P_0 до давления P_i , а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении P_i без теплообмена, как в пункте а) задачи. После этого открывается впускной клапан, через который в цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении P_0 , поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении P_0 . На этом цикл заканчивается. Естественно, придётся совершить довольно много ($N \gg 1$) таких циклов «проталкивания» воздуха в камеру, для того чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно P . Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

b1) (1 балл) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры P_0 , P , V_C и V_0 считаются известными.

b2) (3 балла) Какую работу A_i совершает поршень на i -м цикле? Ответ выразите через P_0 , P_i и V_C .

b3) (2 балла) Определите изменение давления в камере на i -м цикле ΔP_i , считая P_0 , P_i , V_C и V_0 известными.

b4) (2 балла) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k -го цикла, используем следующий приём. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде

$$\frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha, \quad (1)$$

где $f(P_i)$ — некоторая функция P_i , α — коэффициент, не зависящий от P_i (α и $f(P_i)$ вам известны, если вы сделали пункт b3). Просуммируем выражения, даваемые формулой (1), от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha \cdot k. \quad (2)$$

Суммирование в формуле (1) можно приближённо заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} \approx \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{f(P)}.$$

Определите давление P_k в камере после k -го цикла. Параметры P_0 , V_C , V_0 и k считаются известными.

б5) (1 балл) Вычислите $P_{\max}$ и $T_{\max}$, считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определённого интеграла от степенной функции даётся формулой

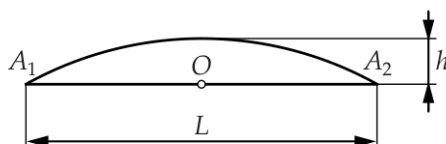
$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}} \right).$$

Ответ

а) $T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P}\right) T_0 = 380$ К, $P_{\max} = P \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \cdot 10^5$ Па; б1) $N = \frac{(P - P_0)V_0}{P_0 V_C}$;
 б2) $A_i = \frac{7}{2} P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C$; б3) $\Delta P_i = \frac{7}{5} P_i^{2/7} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}$; б4) $P_k = P_0 \left(1 + \frac{V_C}{V_0} k\right)^{7/5}$; б5) $P_{\max} = P_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^{7/5} \approx 4,7 \cdot 10^5$ Па, $T_{\max} = T_0 \frac{P_{\max}}{P} \approx 466$ К.

5 Цилиндрическая линза

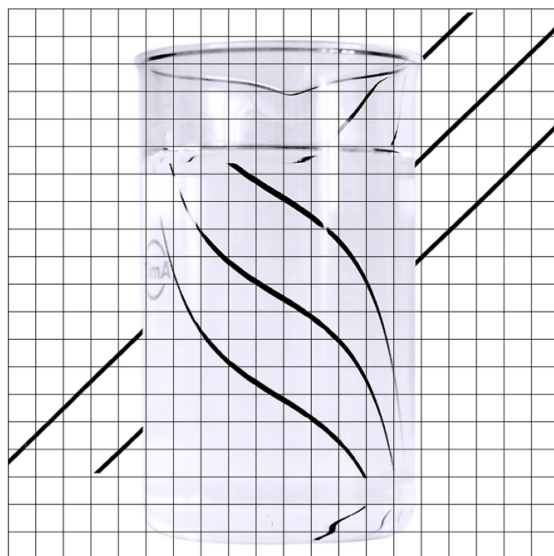
Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (см. рисунок) мала по сравнению с её шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R , то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды $A_1 A_2$ (см. рисунок).



а) (3 балла) Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от неё располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.

б) (7 баллов) Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) заполнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на

неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплён лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведённую ниже (увеличенный вариант см. на дополнительном листе), определите расстояние от оси мензурки до стены.



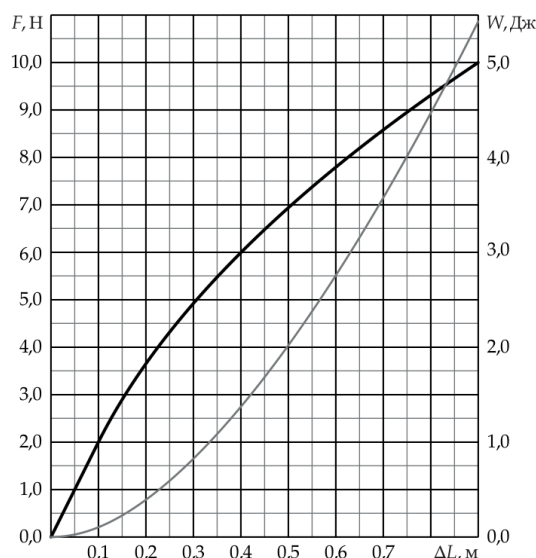
Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезали, поверх изображения была нанесена сетка.

Ответ

а) $S = \frac{\pi r^2}{3}$; б) $x = \frac{13}{4}R = 130 \text{ мм}$ (принимается $(120 \pm 15) \text{ мм}$).

6 Нелинейный шнур

Графики зависимостей $F(\Delta L)$ и $W(\Delta L)$ упругой силы и энергии деформации нелинейного резинового шнура от его удлинения ΔL изображены на рисунке, представленном ниже. Зависимости $F(\Delta L)$ соответствует чёрная линия увеличенной толщины, при этом значения считываются с левой шкалы. Зависимости $W(\Delta L)$ соответствует серая линия, значения считываются со шкалы справа.



Пусть один конец шнура закреплён на потолке, а к другому концу присоединён груз массой M . Сначала шнур имеет форму прямой линии, не провисает, но и не деформирован, груз удерживается внешней силой. В некоторый момент времени груз освобождают. Найдите максимальное удлинение шнура $\Delta L_{\max}$, равновесное удлинение ΔL_0 , устанавливающееся спустя длительное время после начала процесса, когда колебания прекращаются, а также период T малых колебаний груза на шнуре вблизи положения равновесия для двух значений массы M .

А. (2 балла) $M = 0,1$ кг;

Б. (4 балла) $M = 0,6$ кг.

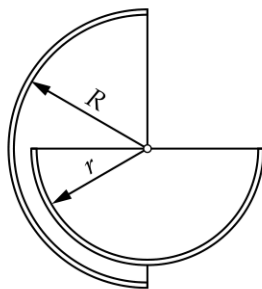
Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

Ответ

А. $\Delta L_0 \approx 0,05 \text{ м}$, $\Delta L_{\max} \approx 0,10 \text{ м}$, $T \approx 0,44 \text{ с}$; Б. $\Delta L_0 \approx 0,4 \text{ м}$, $\Delta L_{\max} \approx 0,89 \text{ м}$, $T \approx 2\pi \sqrt{\frac{0,6}{10}} \approx 1,54 \text{ с}$.

7 Полусферы

Имеются две диэлектрические равномерно заряженные полусферы с радиусами R и r и зарядами Q и q соответственно. Полусферы имеют общий центр и расположены относительно друг друга так, что плоскость, закрывающая одну полусферу, перпендикулярна плоскости, закрывающей другую полусферу (см. рисунок). Найдите энергию электростатического взаимодействия полусфер.



Ответ

$$W = \frac{kQq}{R}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

8 Неоднородное поле

Между областью пространства, в которой нет магнитного поля, и областью, в которой есть однородное магнитное поле с направлением вектора индукции B параллельным границе раздела этих областей, имеется «переходный участок» ширины L , в котором поле линейно нарастает. В этот переходный участок перпендикулярно границе раздела влетел протон со скоростью v . Максимальная глубина «проникновения» протона туда, где поле есть, как раз равна толщине «переходного участка». «Разворот» протона длился $\tau_p = 1$ секунду. В точности с такой же скоростью и тоже перпендикулярно границе раздела в эту же область влетел электрон. Сколько времени длился «разворот» электрона? На какую глубину электрон проник в область, где имеется магнитное поле? Масса электрона в 1838 раз меньше массы протона.

Ответ

$$\tau_e = \frac{\tau_p}{\sqrt{1838}} \approx 0,023 \text{ с}; \text{ глубина проникновения электрона } L_e = \frac{L}{\sqrt{1838}} \approx \frac{L}{43}.$$

9 Построение

На выданном вам дополнительном листе вы видите кривую, которая является действительным увеличенным изображением половины окружности в тонкой линзе, а также точку (точнее говоря, маленький кружок, лежащий на отрезке, стягивающем концы кривой), являющуюся изображением центра этой окружности. Постройте оптический центр линзы. Найдите фокусное расстояние и радиус окружности. Единицей измерения длины считайте длину стороны маленькой клетки на рисунке.

Построения следует делать на выданном вам дополнительном листе. Учтите, что при оценивании вашего решения будет учитываться только конечный результат, поэтому точность построений и вычислений в этой задаче критически важна.

Ответ

$f = 20$, $R = 6$ (в клетках); оптический центр O — на рисунке решения (на главной оптической оси, на расстоянии 20 от фокуса F).

10 Сжатие насыщенного

В теплопроводящем цилиндре под поршнем при температуре окружающей среды T_0 находится один моль насыщенного пара воды. Жидкой воды в сосуде нет. Универсальная газовая постоянная и молярная масса воды равны $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ и $\mu = 18 \text{ г/моль}$. Плотность жидкой воды равна 1 г/см^3 .

А. (2 балла) Пусть объём под поршнем очень медленно уменьшается на 10% при постоянной температуре T_0 . Пренебрегая объёмом образующейся жидкой воды, определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(T)}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(T)}$. Удельная теплота парообразования воды равна L . В этой части задачи предполагается ответ в общем виде.

Зависимость давления насыщенного пара от температуры в некотором диапазоне температур даётся в таблицах, представленных ниже. Значения, указанные в этих таблицах, можно считать известными во всех следующих частях задачи.

$t, ^\circ\text{C}$	23	24	25	26	27	28	29	30
$p, \text{кПа}$	2,81	2,99	3,17	3,36	3,57	3,78	4,01	4,25

$t, ^\circ\text{C}$	31	32	33	34	35	36	37	38
$p, \text{кПа}$	4,50	4,76	5,03	5,32	5,63	5,95	6,28	6,63

Б. (2 балла) Определите значение удельной теплоты парообразования L при температуре 27°C .

В. (3 балла) Пусть состояние моля насыщенного пара воды, взятого при температуре 27°C , изменяется таким образом, что пар всё время остаётся насыщенным, при этом его объём уменьшается на 10%. Определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(\text{нас})}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(\text{нас})}$ в этом случае.

Г. (4 балла) Представим, что объём моля насыщенного пара, взятого при температуре 27°C , уменьшается на 10% адиабатически. Найдите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(Q)}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(Q)}$ для этого случая.

Указание. На линии насыщения справедливо уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{г}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \right)},$$

где dP и dT — изменения давления и температуры на линии насыщения, L — удельная теплота парообразования, $\rho_{\text{г}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ — плотность газовой фазы и плотность жидкой фазы вблизи линии насыщения при температуре T .

Ответ

А. $A_{\text{ext}}^{(T)} = 0,1\nu_0 RT$, $\Delta U^{(T)} = -0,1\nu_0(\mu L - RT)$; Б. $L \approx 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; В. $\Delta U^{(\text{нас})} \approx 50 \text{ Дж}$, $A_{\text{ext}}^{(\text{нас})} \approx 278 \text{ Дж}$; Г. $A_{\text{ext}}^{(Q)} = \Delta U^{(Q)} \approx 266 \text{ Дж}$.