

МОШ, 2023/24, заключительный этап, 11 класс

Условия, ответы и решения

1 График потенциала

Три одинаковых тонких диска радиусом R , однородно заряженных с поверхностной плотностью σ , 2σ и -3σ , расположены так, что ось OX является общей осью этих дисков, при этом центры дисков находятся в точках с координатами 0 , d и $2d$, где $d = \frac{R}{1000}$. Потенциал в центре уединённого диска, заряженного однородно с поверхностной плотностью σ , равен 1000 В. Потенциал бесконечно удалённой точки считается равным нулю.

а) (2 балла) Получите формулу $\varphi_0 = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}$, дающую потенциал в центре уединённого однородно заряженного диска. Эту формулу разрешается использовать при выполнении задания следующего пункта, даже если вы не можете её вывести.

б) (4 балла) Изобразите график зависимости потенциала φ электрического поля дисков в точках, лежащих на оси OX , от безразмерной координаты $a = \frac{x}{d}$ для значений a , принадлежащих отрезку $[0; 2]$.

Подсказка

На расстояниях порядка $d \ll R$ поле каждого диска однородно, поэтому потенциал вблизи диска убывает линейно с расстоянием от его центра. Сложите потенциалы трёх дисков.

Ответ

а) формула выводится суммированием потенциалов колец, на которые разбит диск; б) $\varphi(a) = (4 - 2a)$ В при $0 < a \leq 1$ и $\varphi(a) = (8 - 6a)$ В при $1 < a \leq 2$ (ломаная от 4 В через 2 В при $a = 1$ до -4 В при $a = 2$).

Решение

а) Потенциал в центре получается в результате интегрирования (суммирования) потенциалов центров тонких колец, на которые разбивается диск:

$$\varphi_0 = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 r} = \int_0^R \frac{\sigma dr}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{2\varepsilon_0}.$$

б) Поскольку поле на расстояниях порядка d однородное, потенциал уединённого диска на оси рядом с центром изменяется линейно в зависимости от координаты

$$\varphi(x) = \varphi_0 - E|x| = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|.$$

Последняя формула может быть получена также в результате интегрирования по кольцам, похожего на вывод формулы для φ_0 . Действительно, потенциал на оси диска в точке с координатой x равен

$$\varphi(x) = \int_0^R \frac{\sigma 2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \right).$$

При малых x в подкоренном выражении можно пренебречь x^2 : $\sqrt{R^2 + x^2} - |x| \approx R \left(1 + \frac{x^2}{2R^2}\right) - |x| \approx R - |x|$, так что в итоге получится то же соотношение.

Рассмотрев суперпозицию трёх дисков, найдём зависимость потенциала системы дисков от координаты:

$$\varphi(x) = -\frac{\sigma|x|}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma|x-d|}{\varepsilon_0} + \frac{3\sigma|x-2d|}{2\varepsilon_0}.$$

Учитывая, что $d = \frac{R}{1000}$, получаем, раскрыв модули, зависимость потенциала от безразмерной координаты на интересующем нас отрезке:

$$\begin{cases} \varphi(a) = (4 - 2a) \text{ В}, & 0 < a \leq 1; \\ \varphi(a) = (8 - 6a) \text{ В}, & 1 < a \leq 2. \end{cases}$$

Искомый график изображён на рисунке.

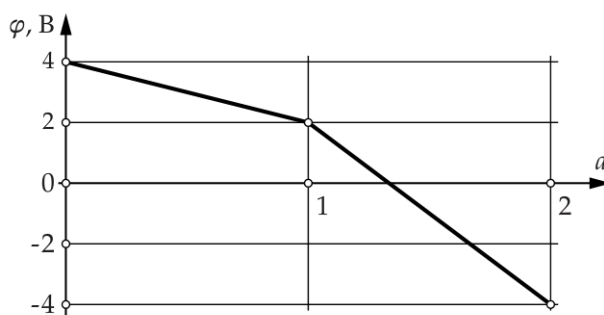


Рис. 1

Этот график можно получить и без использования формулы для потенциала вблизи диска. Систему дисков можно рассматривать как суперпозицию двух конденсаторов: обкладки одного заряжены с поверхностной плотностью $\pm 3\sigma$, расстояние между ними равно $2d$, обкладки другого заряжены с поверхностной плотностью $\mp 2\sigma$, расстояние между ними равно d . Потенциал поля уединённого конденсатора с поверхностными зарядами $\pm\sigma$ на обкладках, расположенных в точках с координатами $\pm \frac{d}{2}$, даётся формулами

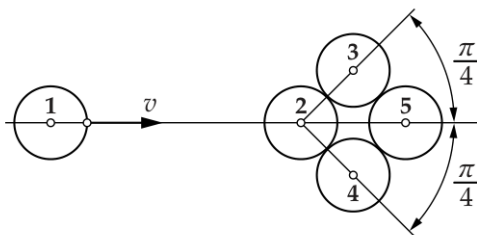
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sigma x}{\varepsilon_0}, & |x| \leq \frac{d}{2}; \\ \pm \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}, & |x| \geq \frac{d}{2}. \end{cases}$$

Эти формулы удовлетворяют условию равенства нулю потенциала в бесконечно удалённой точке, при этом снаружи конденсатора потенциал можно считать постоянным только вблизи конденсатора. Сложив потенциалы полей конденсаторов, получим искомый график.

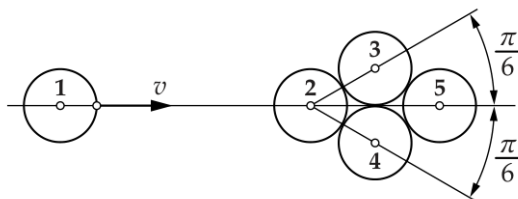
2 Аэрохоккей

Шайбы одинаковой массы могут скользить по горизонтальной поверхности без трения. Боковая поверхность шайб гладкая, столкновения между шайбами можно считать абсолютно упругими.

а) (2 балла) В начальный момент шайбы 2, 3, 4, 5 располагаются так, что их центры являются вершинами квадрата (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 со скоростью $v = 1$ м/с. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



б) (6 баллов) В этом случае центры неподвижных шайб образуют ромб с острым углом $\frac{\pi}{3}$ (см. рисунок), шайба 1 налетает на шайбу 2 с такой же скоростью $v = 1$ м/с, как и в первом случае. Найдите скорости шайб после того, как все столкновения прекратятся.



В обоих случаях считайте, что столкновения происходят мгновенно. За время столкновения шайбы не успевают сдвинуться. В точках на рисунке, где шайбы касаются друг друга, на самом деле они разделены микроскопическими воздушными зазорами.

Подсказка

Шайбы гладкие, поэтому при столкновении импульс шайбы меняется только вдоль линии, соединяющей центры. Запишите законы сохранения импульса и энергии для удара шайбы 2 сразу по двум шайбам, затем проследите, какие столкновения произойдут дальше.

Ответ

а) $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ м/с; б) $v_1 = \frac{v}{5} = 0,2$ м/с, $v_2 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60$ м/с, $v_5 = \frac{12v}{25} = 0,48$ м/с.

Решение

а) Шайба 1 останавливается, передавая импульс шайбе 2. Далее происходит столкновение шайбы 2 с шайбами 3 и 4. Шайбы гладкие, следовательно, их скорости в процессе столкновения меняются только под действием сил нормальной реакции, поэтому после столкновения скорости третьей и четвёртой шайб направлены под углом $\frac{\pi}{4}$ к горизонтальной прямой, направление скорости второй шайбы не меняется. Теперь расчёт скорости второй шайбы v_2 и третьей шайбы v_3 после столкновения может быть сделан на основе законов сохранения. Получится система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2}v_3 + v_2 = v, \\ 2v_3^2 + v_2^2 = v^2. \end{cases}$$

Решая систему, находим следующие значения скоростей второй и третьей шайб: $v_2 = 0$, $v_3 = \frac{v}{\sqrt{2}}$. Таким образом, вторая шайба останавливается, а третья и четвёртая движутся со скоростью $\frac{v}{\sqrt{2}}$ по траекториям, составляющим одинаковые углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтальной прямой. Легко видеть, что в процессе дальнейшего движения шайбы 3 и 4 с пятой шайбой не сталкиваются,

поэтому пятая шайба покоится в исходном положении. В итоге имеем ответы: $v_1 = v_2 = v_5 = 0$, $v_3 = v_4 = \frac{v}{\sqrt{2}} \approx 0,7$ м/с.

б) В этом случае после столкновения второй шайбы с шайбами 3 и 4 скорости этих шайб u_3 и u_4 направлены под углом $\frac{\pi}{6}$ к горизонтальной прямой, вдоль которой до и после столкновения движется вторая шайба. Обозначив u_2 скорость второй шайбы после столкновения, запишем законы сохранения. В итоге получим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3} u_3 + u_2 = v, \\ 2u_3^2 + u_2^2 = v^2. \end{cases}$$

Решив систему, находим значения скоростей: $u_2 = -\frac{v}{5}$, $u_3 = \frac{2\sqrt{3}v}{5}$. Таким образом, вторая шайба летит назад. Очевидно, далее она сталкивается с первой шайбой и передаёт ей весь свой импульс. Шайбы 3 и 4 при дальнейшем движении сталкиваются с шайбой 5. Рассмотрим это столкновение.

Из симметрии следует, что скорость шайбы 5 после столкновения будет направлена горизонтально. Пусть ось OX системы координат также направлена горизонтально. Обозначим $v_{\perp}$ проекцию скорости шайбы 3 после столкновения на направление, перпендикулярное линии, соединяющей центры шайб 3 и 5. Проекция скорости на это направление при столкновении не меняется, поэтому $v_{\perp} = u_3 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{3v}{5}$. Проекцию скорости шайбы 3 на направление вдоль линии, соединяющей центры 3 и 5, обозначим $v_{\parallel}$. Положительному значению проекции $v_{\parallel}$ соответствует направление от шара 3 к шару 5.

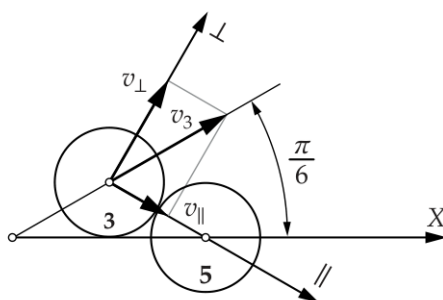


Рис. 2

Закон сохранения импульса в проекции на ось OX даёт уравнением

$$\frac{6v}{5} = v_5 + 2v_{\perp} \cos \frac{\pi}{3} + 2v_{\parallel} \cos \frac{\pi}{6},$$

которому после преобразований можно придать вид

$$\frac{3v}{5} = v_5 + v_{\parallel} \sqrt{3}.$$

Закон сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{24v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\perp}^2 + 2v_{\parallel}^2 \Rightarrow \frac{6v^2}{25} = v_5^2 + 2v_{\parallel}^2.$$

Законы сохранения образуют систему уравнений. Эту систему можно решить, например, так: выразим v_5 из закона сохранения импульса и подставим в закон сохранения энергии. В итоге получится квадратное уравнение

$$5v_{\parallel}^2 - \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{5} v v_{\parallel} + \frac{3}{25} v^2 = 0.$$

Решив которое, найдём корни

$$v_{\parallel}^{(1)} = \frac{\sqrt{3}v}{25}, \quad v_{\parallel}^{(2)} = \frac{\sqrt{3}v}{5}.$$

Второй корень не имеет физического смысла, поскольку скорость шайбы 5 в этом случае, как следует из закона сохранения импульса, оказывается равна нулю. Подставляя значение $v_{\parallel}^{(1)}$ в закон сохранения импульса, получаем ответ для скорости пятой шайбы

$$v_5 = \frac{3v}{5} - v_{\parallel}^{(1)}\sqrt{3} = \frac{12v}{25} = 0,48 \text{ м/с}.$$

Для конечной скорости шайб 3 и 4 имеем

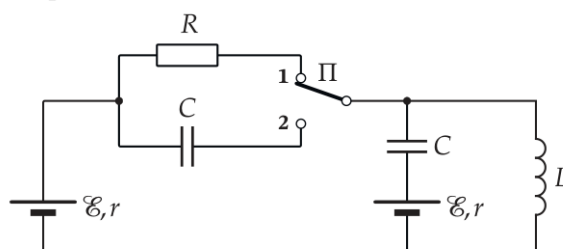
$$v_4 = v_3 = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \frac{2\sqrt{57}v}{25} \approx 0,60 \text{ м/с}.$$

3 С двумя батарейками

В цепи, схема которой изображена на рисунке, представленном ниже, параметры $\mathcal{E}$, L , C известны. Сопротивление соединительных проводов и катушки равно нулю. Внутреннее сопротивление батареи r и сопротивление резистора R удовлетворяют соотношениям

$$r \ll R, \quad rC \ll \sqrt{LC}, \quad RC = \sqrt{2LC}.$$

Изначально переключатель Π находится в положении 1, при этом в цепи установился стационарный режим. Напряжение на конденсаторе, соединённом с клеммой 2, равно нулю. В момент времени $t = 0$ переключатель мгновенно переводят в положение 2.



- (6 баллов) Определите, в какой момент времени t_L ток через катушку впервые изменит направление.
- (2 балла) Какое количество теплоты Q выделится в цепи за очень большое время после перевода ключа в положение 2.

Подсказка

За время порядка rC конденсаторы быстро перезаряжаются, а ток катушки за это время не успевает измениться. Затем в контуре идут слабо затухающие колебания. Для количества теплоты удобен закон сохранения энергии с учётом работы батарей.

Ответ

$$\text{a) } t_L = \frac{3\pi}{4}\sqrt{2LC}; \quad \text{b) } Q = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}.$$

Решение

а) После перевода переключателя в положение 2 за очень короткое время (порядка $\tau_C = rC$) произойдёт перезарядка конденсаторов, так что напряжение на каждом из них станет равно $\frac{\mathcal{E}}{2}$, обкладки конденсаторов, обращённые к клемме 2, будут заряжены отрицательно. Действительно, батареи, конденсаторы и катушка образуют колебательный контур, в котором будут происходить слабо затухающие колебания. Характерное время изменения тока через катушку при возникающих колебаниях равно (по порядку величины) $\tau_{RLC} = \sqrt{LC}$. Из условия следует, что $\tau_C \ll \tau_{RLC}$, поэтому ток через катушку не успеет измениться за время быстрой перезарядки конденсаторов. Таким образом, в начальный момент через катушку течёт ток $I(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$, такой же, как до перевода переключателя в положение 2.

В колебательном процессе в каждый момент времени токи, текущие через батарейки, будут одинаковыми, при этом через катушку будет течь ток вдвое больший: $I(t) = 2\dot{q}$. Запишем уравнение обхода (второе правило Кирхгофа) для контура, содержащего катушку и одну из батарей:

$$\ddot{q} + \frac{\dot{q}r}{2L} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Затухание колебаний происходит за время порядка $\frac{L}{r}$, которое благодаря сильному неравенству, данному в условии, оказывается значительно больше периода колебаний, равного по порядку величины $\sqrt{LC}$. Таким образом, для ответа на вопрос пункта а) задачи достаточно рассмотреть вместо этого уравнения уравнение колебаний без затухания

$$\ddot{q} + \frac{q}{2LC} = \frac{\mathcal{E}}{2L}.$$

Общее решение этого уравнения даётся формулой

$$q(t) = C\mathcal{E} + q_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где $\omega^2 = \frac{1}{2LC}$, параметры q_0 и φ_0 определяются из начальных условий. Ток через катушку равен удвоенной производной заряда, поэтому из этой формулы следует зависимость

$$I(t) = -2\omega q_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Для нулевого момента из начальных условий имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{C\mathcal{E}}{2} = C\mathcal{E} + q_0 \cos \varphi_0; \\ \frac{\mathcal{E}}{R} = -2q_0\omega \sin \varphi_0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем уравнение

$$\omega \tan \varphi_0 = \frac{1}{RC}$$

для определения начальной фазы. По условию $\omega RC = \frac{RC}{\sqrt{2LC}} = 1$, поэтому это уравнение имеет решение $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$. Из формулы для $I(t)$ следует, что направление тока изменяется в момент времени t_L , удовлетворяющий соотношению $\omega t_L = \frac{3\pi}{4}$. Таким образом, имеем ответ: $t_L = \frac{3\pi}{4} \sqrt{2LC}$.

б) Количество теплоты можно найти, используя закон сохранения энергии, записанный в виде

$$A\mathcal{E} = \Delta W_C + \Delta W_L + Q.$$

Когда в цепи установится стационарный режим, ток через катушку течь не будет, а конденсаторы будут заряжены до напряжения $\mathcal{E}$, поэтому изменение энергии конденсаторов ΔW_C в процессе перезарядки и затухания колебаний равно

$$\Delta W_C = 2 \cdot \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C\mathcal{E}^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2},$$

изменение энергии магнитного поля катушки даётся формулой

$$\Delta W_L = -\frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2} = -\frac{C\mathcal{E}^2}{4}.$$

При выводе этой формулы использовалось соотношение $R^2 = \frac{2L}{C}$, следующее из условия.

Одна из батарей в процессе установления стационарного режима перемещает нулевой заряд, другая перемещает заряд $C\mathcal{E}$, поэтому суммарная работа ЭДС $A_{\mathcal{E}}$ равна

$$A_{\mathcal{E}} = C\mathcal{E}^2.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, отражающее закон сохранения энергии, находим количество теплоты

$$Q = A_{\mathcal{E}} - \Delta W_C - \Delta W_L = \frac{3C\mathcal{E}^2}{4}.$$

4 Накачивая шину

В задаче рассматривается физическая модель, описывающая некоторые особенности процесса накачивания камеры велосипедного колеса. Объём камеры V_0 считается неизменным. Начальное давление воздуха в камере равно P_0 при температуре окружающей среды T_0 . После накачивания воздух в камере должен создавать давление P при той же температуре T_0 . Воздух считается идеальным двухатомным газом ($c_V = 2,5R$).

а) (6 баллов) В этом пункте камеру соединяют через ниппель с сосудом очень большого объёма V_1 ($V_1 \gg V_0$), который содержит воздух при температуре T_0 и таком давлении $P_{\max}$ ($P_{\max} > P$), что после заполнения камеры и её охлаждения до температуры T_0 давление воздуха в камере становится равно P . Ниппель пропускает воздух в камеру, до тех пор пока давление в ней не сравняется с давлением в сосуде, после этого ниппель закрывается и обратно воздух не выпускает.

«Проталкивание» в камеру порции воздуха из сосуда происходит очень быстро, поэтому можно считать, что процесс «проталкивания» осуществляется без теплообмена между этой порцией и воздухом, остающимся в сосуде, а также между воздухом в камере и окружающей средой. В результате температура и давление воздуха в камере повышаются до значений $P_{\max}$ и $T_{\max}$. Через некоторое время после этого температура воздуха в камере сравнивается с температурой окружающей среды T_0 , давление в камере становится равно P .

Считая известными значения $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па, определите $P_{\max}$ и $T_{\max}$.

б) Теперь представим себе, что камера накачивается воздухом при помощи ручного насоса. В начале каждого цикла цилиндр насоса объёмом V_C ($V_C \ll V_0$) заполняется воздухом при атмосферном давлении P_0 и температуре T_0 . Пусть в начале i -го цикла давление в камере равно P_{i-1} . На i -м цикле воздух в цилиндре сначала адиабатически сжимается поршнем от давления P_0 до давления P_i , а затем «проталкивается» через ниппель при постоянном давлении P_i без теплообмена, как в пункте а) задачи. После этого открывается впускной клапан, через который в цилиндр насоса поступает воздух из окружающей среды при давлении P_0 , поршень отодвигается в исходное положение, цилиндр заполняется атмосферным воздухом при давлении P_0 . На этом цикл заканчивается. Естественно, придётся совершить довольно много ($N \gg 1$) таких

циклов «проталкивания» воздуха в камеру, для того чтобы после установления температуры T_0 давление в камере стало равно P . Поскольку накачивание камеры происходит очень быстро, теплообмен между воздухом в камере и окружающей средой начинается уже после окончания работы насоса.

b1) (1 балл) Сколько циклов N необходимо совершить, чтобы накачать камеру? Параметры P_0 , P , V_C и V_0 считаются известными.

b2) (3 балла) Какую работу A_i совершает поршень на i -м цикле? Ответ выразите через P_0 , P_i и V_C .

b3) (2 балла) Определите изменение давления в камере на i -м цикле ΔP_i , считая P_0 , P_i , V_C и V_0 известными.

b4) (2 балла) Для того чтобы найти давление в камере после окончания k -го цикла, используем следующий приём. Соотношение, полученное в предыдущем пункте, можно представить в виде

$$\frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha, \quad (1)$$

где $f(P_i)$ — некоторая функция P_i , α — коэффициент, не зависящий от P_i (α и $f(P_i)$ вам известны, если вы сделали пункт b3). Просуммируем выражения, даваемые формулой (1), от $i = 1$ до $i = k$:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} = \alpha \cdot k. \quad (2)$$

Суммирование в формуле (1) можно приближённо заменить на интегрирование:

$$\sum_{i=1}^k \frac{\Delta P_i}{f(P_i)} \approx \int_{P_0}^{P_k} \frac{dP}{f(P)}.$$

Определите давление P_k в камере после k -го цикла. Параметры P_0 , V_C , V_0 и k считаются известными.

b5) (1 балл) Вычислите $P_{\max}$ и $T_{\max}$, считая известными значения параметров $T_0 = 300$ К, $P = 3 \cdot 10^5$ Па и $P_0 = 10^5$ Па.

Указание. Значение определённого интеграла от степенной функции даётся формулой

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{dx}{x^k} = \frac{1}{k-1} \left(\frac{1}{a_1^{k-1}} - \frac{1}{a_2^{k-1}} \right).$$

Подсказка

Пока воздух «проталкивается», теплообмена нет, и работа сил давления идёт на увеличение внутренней энергии всего воздуха в камере. В пункте b) работа на цикле складывается из адиабатического сжатия порции и её выталкивания при постоянном давлении; приравняйте её приращению внутренней энергии газа в камере.

Ответ

$$\begin{aligned} \text{a) } T_{\max} &= \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P} \right) T_0 = 380 \text{ К}, P_{\max} = P \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \cdot 10^5 \text{ Па}; \text{ b1) } N = \frac{(P - P_0)V_0}{P_0 V_C}; \\ \text{b2) } A_i &= \frac{7}{2} P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C; \text{ b3) } \Delta P_i = \frac{7}{5} P_i^{2/7} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}; \text{ b4) } P_k = P_0 \left(1 + \frac{V_C}{V_0} k \right)^{7/5}; \text{ b5) } P_{\max} = \\ &P_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{7/5} \approx 4,7 \cdot 10^5 \text{ Па}, T_{\max} = T_0 \frac{P_{\max}}{P} \approx 466 \text{ К}. \end{aligned}$$

Решение

а) Для того чтобы при температуре окружающей среды давление в камере оказалось равно P , следует «протолкнуть» в камеру количество воздуха

$$\Delta\nu = \frac{(P - P_0)V_0}{RT_0}.$$

Этот воздух занимал в сосуде объём

$$V' = \frac{\Delta\nu RT_0}{P_{\max}} = \frac{(P - P_0)V_0}{P_{\max}}.$$

«Проталкивая» порцию воздуха в камеру, силы давления совершают работу

$$A = P_{\max}V' = (P - P_0)V_0.$$

Можно считать, что давление в сосуде почти не меняется, ведь его объём очень большой. За счёт работы A увеличивается внутренняя энергия воздуха в камере и воздуха в проталкиваемой порции. Поскольку теплообмена нет, получаем соотношение

$$(P - P_0)V_0 = \frac{5R(\nu + \Delta\nu)\Delta T}{2},$$

где ν — начальное количество воздуха в камере. Для конечного состояния воздуха в камере (после охлаждения до температуры T_0) справедливо уравнение состояния

$$PV_0 = (\nu + \Delta\nu)RT_0.$$

Подставляя количество вещества из второго соотношения в первое, получаем уравнение

$$\frac{P - P_0}{P} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\Delta T}{T_0},$$

из которого следует ответ для температуры

$$T_{\max} = \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{P - P_0}{P}\right) T_0 = 380 \text{ К}.$$

Давление находится из закона Шарля

$$P_{\max} = P \frac{T_{\max}}{T_0} = 3,80 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

b1) Количество циклов «проталкивания» N можно определить, зная начальное и конечное количество газа в камере. За один цикл в камеру проталкивается воздух из насоса в количестве $\Delta\nu = \frac{P_0 V_C}{RT_0}$, поэтому количество циклов равно

$$N = \frac{(P - P_0)V_0}{RT_0 \Delta\nu} = \frac{(P - P_0)V_0}{P_0 V_C}.$$

b2) При адиабатическом сжатии от давления P_0 до давления P_i поршнем совершается работа, равная изменению внутренней энергии сжимаемого в насосе воздуха

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} P_0 V_C \left(\frac{T'}{T_0} - 1 \right),$$

где T' — температура, которая достигается в конце сжатия. При помощи уравнения адиабаты $TP^{-2/7} = \text{const}$ выражение для работы при адиабатическом сжатии может быть записано в виде

$$A_{Q=0} = \frac{5}{2} P_0 V_C \left(\left(\frac{P_i}{P_0} \right)^{2/7} - 1 \right).$$

Далее работа совершается при постоянном давлении. Она равна

$$A_P = P_i V' = P_i V_C \left(\frac{P_0}{P_i} \right)^{5/7} = P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C.$$

Суммируя эти работы, получаем для работы на i -м цикле формулу

$$A_i = A_{Q=0} + A_P = \frac{7}{2} P_i^{2/7} P_0^{5/7} V_C - \frac{5}{2} P_0 V_C.$$

b3) За счёт работы A_i изменяется внутренняя энергия того воздуха, который уже был в камере на момент начала i -го цикла, и той порции, которая «проталкивается» в камеру. Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U_i = \frac{5}{2} P_i V_0 - \frac{5}{2} (P_{i-1} V_0 + P_0 V_C).$$

Приравняв изменение внутренней энергии и работу A_i , с учётом равенства $\Delta P_i = P_i - P_{i-1}$ имеем формулу

$$\Delta P_i = \frac{7}{5} \cdot P_i^{2/7} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0}.$$

b4) Осуществляя интегрирование, как описано в формулировке задачи, получаем соотношение

$$\frac{7}{5} (P_k^{5/7} - P_0^{5/7}) = \frac{7}{5} P_0^{5/7} \frac{V_C}{V_0} \cdot k.$$

Сделав преобразования в полученной формуле, находим ответ

$$P_k = P_0 \left(1 + \frac{V_C}{V_0} k \right)^{7/5}.$$

b5) Подставляем в формулу для давления количество циклов $k = N$ из пункта b1), находим максимальное давление

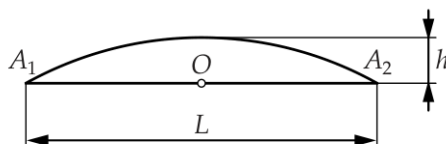
$$P_{\max} = P_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{P_0} \right)^{7/5} = P_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{7/5} \approx 4,7 \cdot 10^5 \text{ Па}.$$

Максимальную температуру можно найти из закона Шарля, как при ответе на вопрос пункта а), получится формула

$$T_{\max} = T_0 \frac{P_{\max}}{P} \approx 466 \text{ К}.$$

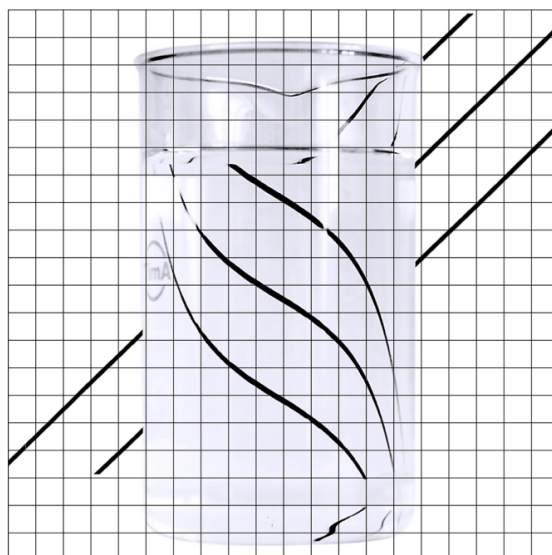
5 Цилиндрическая линза

Если цилиндр из стекла с показателем преломления n разрезать по плоскости, параллельной оси цилиндра, то получится цилиндрический сегмент, который с оптической точки зрения представляет собой цилиндрическую линзу. Если толщина этой линзы h (см. рисунок) мала по сравнению с её шириной L и радиусом кривизны выпуклой поверхности R , то можно говорить о тонкой цилиндрической линзе. Для такой линзы поперечное увеличение имеет разные значения в разных направлениях. В направлении вдоль оси O поперечное увеличение равно 1, иначе говоря, размеры предмета и изображения вдоль этой оси одинаковые. Осью O мы называем прямую, параллельную оси исходного цилиндра, проходящую через середину хорды $A_1 A_2$ (см. рисунок).



а) (3 балла) Пусть на плоскую сторону тонкой цилиндрической линзы падает параллельный пучок света круглого сечения. Ось пучка перпендикулярна плоской поверхности линзы и пересекает ось O линзы. Радиусы пучка и выпуклой поверхности линзы равны r и R соответственно, показатель преломления материала линзы равен $n = \frac{4}{3}$. За линзой на расстоянии $2R$ от неё располагается экран, параллельный плоскости линзы. Определите площадь светлого пятна на экране. Все лучи пучка проходят через линзу.

б) (7 баллов) Тонкостенная мензурка диаметром 80 мм (толщиной стенок можно пренебречь) заполнена водой (показатель преломления равен 1,33) и стоит на горизонтальном столе на неизвестном расстоянии от вертикальной стены. На стене закреплён лист, на котором изображены три прямые параллельные линии. Их наблюдают через мензурку. Используя фотографию, приведённую ниже (увеличенный вариант см. на дополнительном листе), определите расстояние от оси мензурки до стены.



Ось объектива фотоаппарата при фотографировании старались ориентировать перпендикулярно стене. В процессе обработки в графическом редакторе фотографию обрезают, поверх изображения была нанесена сетка.

Подсказка

Вдоль оси цилиндра размеры не меняются, поперёк — меняются. Поэтому наклон прямых на фотографии отличается от наклона самих линий; отношение тангенсов даёт поперечное увеличение. Мензурку вблизи оси можно считать двумя тонкими плосковыпуклыми линзами с пластинкой между ними.

Ответ

а) $S = \frac{\pi r^2}{3}$; б) $x = \frac{13}{4}R = 130$ мм (принимается (120 ± 15) мм).

Решение

а) В направлении вдоль оси O размер пучка, как следует из условия, не меняется. Найдём изменение размера пучка в направлении, перпендикулярном оси. Фокусное расстояние плоско-выпуклой линзы, сделанной из материала с показателем преломления $\frac{4}{3}$, даётся формулой

$$f = \frac{R}{n-1} = 3R.$$

Таким образом, если бы экран располагался на расстоянии $3R$ от линзы, то пучок круглого сечения изобразился бы в сильно вытянутый эллипс — в отрезок длиной $2r$. Однако экран находится на расстоянии $2R$ от линзы, поэтому на нём наблюдается светлое пятно в виде эллипса с полуосями r и $\frac{r}{3}$, площадь которого равна

$$S = \frac{\pi r^2}{3}.$$

Отметим, что можно было бы обойтись без использования формулы для f . Можно было рассмотреть преломление лучей падающего пучка на выпуклой границе раздела и найти расстояние, на котором пересекаются эти лучи.

б) Для лучей, идущих вблизи оси мензурки, последняя представляет собой две тонкие плоско-выпуклые линзы (радиус выпуклой поверхности каждой из этих линз равен R), разделённые плоскопараллельной пластинкой толщиной $2R$ (см. рис.).

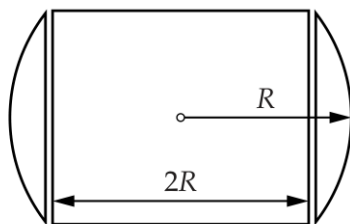


Рис. 3

Эта оптическая система формирует перевёрнутое изображение прямой линии, которое имеет вид кривой из-за аберрации. Однако вблизи оси мензурки отрезки прямых приближённо изображаются в отрезки прямых. Поскольку цилиндрическая линза изменяет размер изображения вдоль горизонтальной оси, но не меняет его вдоль вертикальной, углы, которые составляют отрезки-изображения с горизонтальной осью, отличаются от углов между линиями-предметами и горизонталью. Построив на фотографии касательные к линиям-изображениям вблизи оси мензурки, можно сравнить углы, которые образуют касательные к изображениям и прямые (предметы) с горизонталью. На рисунке сделано такое построение, углы обозначены α и β . Справедливо соотношение

$$\frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \Gamma_0,$$

где Γ_0 — увеличение (вдоль горизонтальной оси), с которым изображается предмет в системе двух тонких цилиндрических линз и плоскопараллельной пластинки, на которые разбивается исходный цилиндр. Делая измерения по фотографии, устанавливаем, что значение увеличения приближённо равно

$$\Gamma_0 \approx \frac{8}{5}.$$

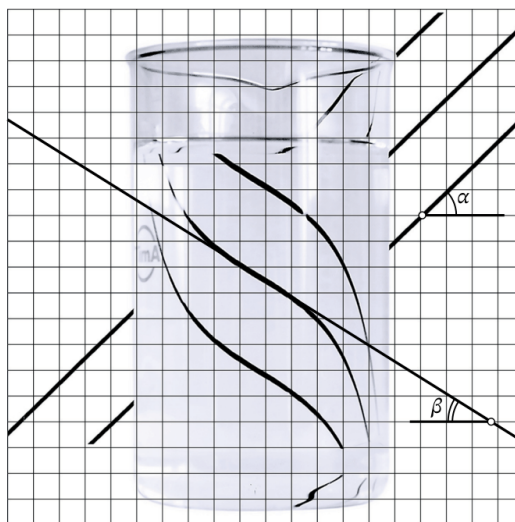


Рис. 4

Далее расчёт можно провести двумя способами. Первый способ предполагает использование формулы линзы. Сначала рассматривается изображение в первой линзе, рассчитывается его увеличение Γ_1 . Это изображение является предметом для плоскопараллельной пластинки. Плоскопараллельная пластинка размеров предмета не меняет. Изображение в ней является предметом для второй линзы, в которой получается изображение с увеличением Γ_2 . Общее увеличение равно произведению увеличений $\Gamma_0 = \Gamma_1 \Gamma_2$. Второй способ предполагает рассмотрение преломления лучей в цилиндре.

Покажем, как делается расчёт первым способом. Пусть предмет находится на расстоянии a_1 от мензурки (так что расстояние от оси мензурки до предмета равно $x = R + a_1$). Поскольку фокусное расстояние плосковыпуклой «водяной» линзы равно $3R$, как следует из формулы для f , расстояние a'_1 до изображения предмета в линзе равно

$$a'_1 = \frac{3Ra_1}{a_1 - 3R}.$$

Величина a_1 может быть отрицательной. Увеличение изображения в первой линзе, таким образом, равно

$$\Gamma_1 = \left| \frac{3R}{a_1 - 3R} \right|.$$

Расстояние от изображения в первой линзе до второй линзы равно $2R - a'_1$. Однако между линзами вставлена плоскопараллельная пластинка толщиной D , которая приближает предметы ко второй линзе на расстояние $\Delta a = D \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \frac{R}{2}$. Таким образом, расстояние от изображения в плоскопараллельной пластинке до второй линзы равно

$$a_2 = 2R - a'_1 - \Delta a = -\frac{3R(a_1 + 3R)}{2(a_1 - 3R)}.$$

Подставляя в формулу линзы расстояние a_2 , получаем для расстояния до изображения следующую формулу

$$a'_2 = \frac{R(a_1 + 3R)}{a_1 - R}.$$

Из выражений для a_2 и a'_2 находим увеличение изображения во второй линзе

$$\Gamma_2 = \left| \frac{a'_2}{a_2} \right| = \left| \frac{2(a_1 - 3R)}{3(a_1 - R)} \right|.$$

Теперь, перемножив Γ_1 и Γ_2 , найдём общее увеличение

$$\Gamma_0 = \left| \frac{2R}{a_1 - R} \right|.$$

Выражение под знаком модуля может быть положительным или отрицательным. Найдём для увеличения $\Gamma_0 \approx \frac{8}{5}$, измеренного по фотографии, расстояние a_1 . Если предположить, что $a_1 < R$, то после раскрытия модуля и решения уравнения получим $a_1 = -\frac{R}{4}$, что, очевидно, не соответствует физической реальности. Рассматривая значения a_1 , удовлетворяющие неравенству $a_1 > R$, раскрывая модуль и решая уравнение, получаем $a_1 = 2,25R$. Это значение не вступает в противоречие с физической реальностью. Таким образом, расстояние от оси мензурки до стены получается равным

$$x = R + a_1 = \frac{13}{4}R = 130 \text{ мм.}$$

При расчёте вторым способом следует рассмотреть два луча, идущих из точечного источника S (см. рис.). Обозначим угол падения луча SD_2 на поверхность цилиндра φ . Будем считать этот угол малым. Он приближённо равен $\varphi = \frac{h}{R}$.

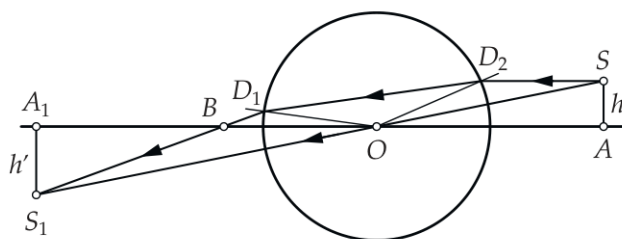


Рис. 5

Из закона преломления следует, что острые углы в равнобедренном треугольнике D_1OD_2 равны $\frac{3\varphi}{4}$. Далее нетрудно показать, что угол D_1OA_1 равен $\frac{\varphi}{2}$, а точка D_1 располагается на расстоянии $h - 2R\frac{\varphi}{4} = \frac{h}{2}$ от прямой A_1A , поэтому длина отрезка BO равна

$$BO = R + \frac{h/2}{\varphi/2} = 2R.$$

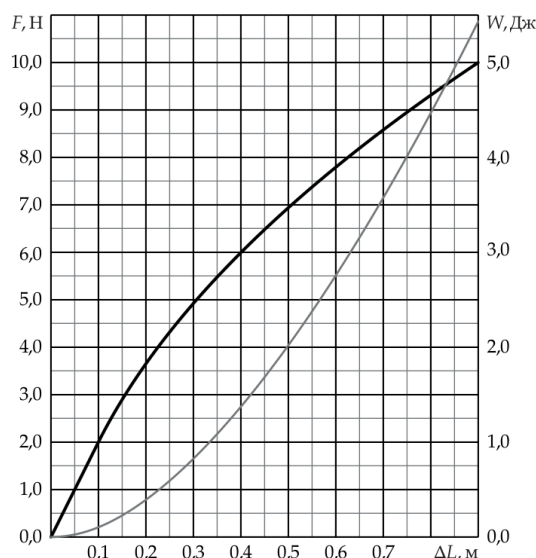
Рассматривая треугольники BA_1S_1 , OA_1S_1 и OAS , можно получить для $x = AO$ уравнение

$$\frac{h'}{h} \cdot x - 2R = \frac{h'}{h} \cdot 2R.$$

Учитывая равенство $\Gamma_0 = \frac{h'}{h}$ и подставляя вместо увеличения Γ_0 значение $\frac{8}{5}$, найденное по фотографии, это уравнение можно решить и получить такой же ответ, как и в первом случае: $x = \frac{13R}{4}$.

6 Нелинейный шнур

Графики зависимостей $F(\Delta L)$ и $W(\Delta L)$ упругой силы и энергии деформации нелинейного резинового шнура от его удлинения ΔL изображены на рисунке, представленном ниже. Зависимости $F(\Delta L)$ соответствует чёрная линия увеличенной толщины, при этом значения считываются с левой шкалы. Зависимости $W(\Delta L)$ соответствует серая линия, значения считываются со шкалы справа.



Пусть один конец шнура закреплён на потолке, а к другому концу присоединён груз массой M . Сначала шнур имеет форму прямой линии, не провисает, но и не деформирован, груз удерживается внешней силой. В некоторый момент времени груз освобождают. Найдите максимальное удлинение шнура $\Delta L_{\max}$, равновесное удлинение ΔL_0 , устанавливающееся спустя длительное время после начала процесса, когда колебания прекращаются, а также период T малых колебаний груза на шнуре вблизи положения равновесия для двух значений массы M .

А. (2 балла) $M = 0,1$ кг;

Б. (4 балла) $M = 0,6$ кг.

Ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

Подсказка

Максимум удлинения найдите из закона сохранения энергии (потерь нет): энергия деформации равна убыли потенциальной энергии груза. Равновесие — когда сила упругости равна Mg . Вблизи равновесия шнур ведёт себя как пружина с жёсткостью, равной наклону касательной к $F(\Delta L)$.

Ответ

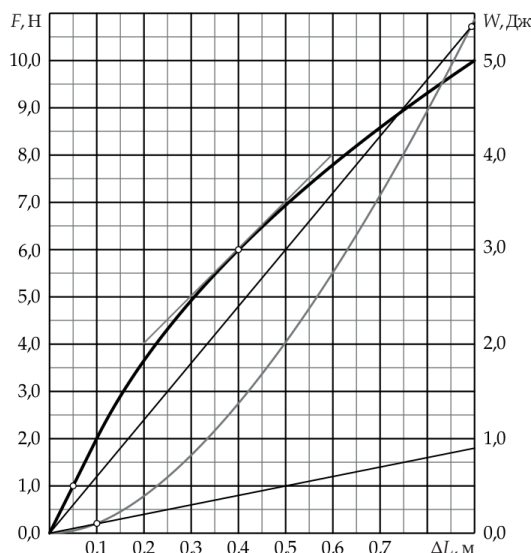
А. $\Delta L_0 \approx 0,05 \text{ м}$, $\Delta L_{\max} \approx 0,10 \text{ м}$, $T \approx 0,44 \text{ с}$; Б. $\Delta L_0 \approx 0,4 \text{ м}$, $\Delta L_{\max} \approx 0,89 \text{ м}$, $T \approx 2\pi\sqrt{\frac{0,6}{10}} \approx 1,54 \text{ с}$.

Решение

Поскольку потери энергии при падении груза малы, максимальное удлинение может быть найдено на основании закона сохранения энергии. Искомая величина в каждом случае есть решение уравнения

$$W(\Delta L) = mg \Delta L,$$

которое может быть найдено графическим способом. Сделав необходимые построения (см. график), находим значения максимального отклонения для каждого пункта. В пункте А получается значение $\Delta L_{\max}^{(A)} \approx 0,10$ м, в пункте Б получается $\Delta L_{\max}^{(B)} \approx 0,89$ м.



Ещё проще найти равновесное значение удлинения. Искомая величина в этом случае удовлетворяет уравнению

$$F(\Delta L) = mg,$$

которое легко решается графически. В результате в пунктах А и Б получается соответственно $\Delta L_0^{(A)} \approx 0,05$ м и $\Delta L_0^{(B)} \approx 0,4$ м.

Для определения периода колебаний будем рассматривать груз на резинке как пружинный маятник, при этом коэффициент жёсткости пружины будем считать равным тангенсу угла наклона касательной к графику силы в положении равновесия. В пункте А жёсткость вблизи положения равновесия равна $k^{(A)} \approx 20$ Н/м, в пункте Б $k^{(B)} \approx 10$ Н/м. Таким образом, период малых колебаний в пункте А равен

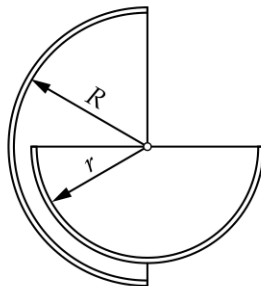
$$T^{(A)} = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{0,1}{20}} \approx 0,44 \text{ с.}$$

В пункте Б получается другое значение

$$T^{(B)} \approx 2\pi \sqrt{\frac{0,6}{10}} \approx 1,54 \text{ с.}$$

7 Полусферы

Имеются две диэлектрические равномерно заряженные полусферы с радиусами R и r и зарядами Q и q соответственно. Полусферы имеют общий центр и расположены относительно друг друга так, что плоскость, закрывающая одну полусферу, перпендикулярна плоскости, закрывающей другую полусферу (см. рисунок). Найдите энергию электростатического взаимодействия полусфер.



Подсказка

Дополните малую полусферу до целой сферы: потенциал равномерно заряженной сферы внутри и на её поверхности легко найти. Затем используйте симметрию.

Ответ

$$W = \frac{kQq}{R}, \text{ где } k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Решение

Задача допускает несколько способов решения. Покажем два из них.

Пусть искомая энергия взаимодействия равна W . Дополним рассматриваемую систему зарядов ещё одной заряженной полусферой радиусом r , так чтобы образовалась малая заряженная сфера.

Потенциал поля малой сферы во всех точках большой полусферы равен $k\frac{2q}{R}$, поэтому энергия взаимодействия сферы радиусом r и полусферы радиусом R равна $k\frac{2qQ}{R}$. С другой стороны, эта энергия равна удвоенной энергии взаимодействия большой и малой полусфер, иначе говоря, удвоенной искомой энергии, поэтому $W = k\frac{qQ}{R}$.

Другой способ решения предполагает анализ распределения потенциала полусферы. Рассмотрим поле большой полусферы. Потенциал этого поля в общем центре полусфер равен $\varphi = k\frac{Q}{R}$. Если большую полусферу дополнить до целой сферы, то потенциал в любой точке внутри сферы будет равен 2φ . Отсюда следуют два утверждения.

а) Во всех точках среза большой полусферы (т. е. во всех точках круга, дополняющего полусферу до замкнутой поверхности) потенциал равен φ .

б) Если рассмотреть две точки A и B , симметричные относительно среза большой полусферы, то потенциалы в этих точках равны $\varphi - \delta$ и $\varphi + \delta$, где δ — некоторая величина, зависящая от расположения точек A и B .

Из утверждения б) следует, что если в точки A и B поместить равные заряды Δq , то их суммарная энергия взаимодействия с внешней сферой будет равна $2\varphi \Delta q$. А поскольку внутренняя полусфера симметрична относительно среза внешней полусферы, то её можно разбить

на пары одинаковых малых зарядов Δq . Отсюда следует, что полная энергия взаимодействия внутренней полусферы с внешней равна

$$W = \varphi q = \frac{kQq}{R}.$$

8 Неоднородное поле

Между областью пространства, в которой нет магнитного поля, и областью, в которой есть однородное магнитное поле с направлением вектора индукции B параллельным границе раздела этих областей, имеется «переходный участок» ширины L , в котором поле линейно нарастает. В этот переходный участок перпендикулярно границе раздела влетел протон со скоростью v . Максимальная глубина «проникновения» протона туда, где поле есть, как раз равна толщине «переходного участка». «Разворот» протона длился $\tau_p = 1$ секунду. В точности с такой же скоростью и тоже перпендикулярно границе раздела в эту же область влетел электрон. Сколько времени длился «разворот» электрона? На какую глубину электрон проник в область, где имеется магнитное поле? Масса электрона в 1838 раз меньше массы протона.

Подсказка

Сила Лоренца не меняет модуль скорости. Составьте уравнение для угла поворота скорости и посмотрите, как время разворота и глубина проникновения зависят от массы частицы (метод размерностей тоже подойдёт).

Ответ

$$\tau_e = \frac{\tau_p}{\sqrt{1838}} \approx 0,023 \text{ с}; \text{ глубина проникновения электрона } L_e = \frac{L}{\sqrt{1838}} \approx \frac{L}{43}.$$

Решение

Будем считать, что потеря энергии на излучение нет, поэтому величины скорости и протона, и электрона во времени не меняются. При этом на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля действует сила (магнитная составляющая силы Лоренца), перпендикулярная и вектору скорости частицы, и вектору индукции магнитного поля. То есть вектор скорости поворачивается. Направление этой силы таково, что частица движется в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля. Если обозначить угол, который образует нормаль к границе раздела и вектор скорости частицы, символом α , то глубина проникновения к моменту времени t равна

$$x(t) = \int_0^t v \cos \alpha \, dt.$$

На такой «глубине» величина индукции магнитного поля равна

$$B(x) = B(L) \frac{x(t)}{L}.$$

Здесь $B(L)$ — это величина магнитного поля на глубине проникновения в переходный участок, равной L . Скорость вращения вектора скорости частицы равна

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{qB(L)}{Lm} x(t)$$

или (если продифференцировать правую и левую части равенства по времени)

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{qB(L)v}{Lm} \cos \alpha.$$

Поскольку угол поворота скорости фиксирован и равен π , то время разворота с некоторым безразмерным коэффициентом пропорционально величине

$$T \sim \sqrt{\frac{Lm}{qvB(L)}}.$$

Отметим, что это соотношение может быть составлено из параметров, данных в условии задачи: v , B , L , q , m , методом размерностей.

Поскольку масса электрона в 1838 раз меньше массы протона, то на «разворот» электрону потребуется меньше времени в $1838^{1/2}$ раз, то есть примерно в 43 раза, следовательно, $\tau_e \approx 0,023$ с. Начальные скорости у протона и электрона одинаковы, их траектории по форме подобны, поэтому во столько же раз будет меньше и глубина проникновения электрона в область с магнитным полем.

Покажем теперь другой способ решения. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси OZ декартовой системы координат, а ось OX направлена перпендикулярно границе поля в сторону его увеличения. Обозначим скорость частицы в некоторый момент V , а единичный вектор, направленный вдоль скорости в этот момент времени, обозначим $\vec{e}_V$, единичный вектор, направленный вдоль оси OX , обозначим $\vec{e}_x$, тогда магнитная составляющая силы Лоренца, действующей на частицу с зарядом q , равна

$$\vec{F} = qV \frac{B_0 x}{L} [\vec{e}_V \times \vec{e}_x],$$

где x — глубина проникновения частицы в область поля, B_0 — индукция магнитного поля в области постоянного поля. Пусть φ — угол, на который поворачивается вектор скорости относительно первоначального направления. Поскольку магнитная составляющая силы Лоренца ортогональна вектору скорости, модуль скорости частицы с течением времени не меняется. Радиус кривизны траектории находится из второго закона Ньютона и оказывается равен

$$R(x) = \frac{mVL}{qB_0 x}.$$

Обозначим длину бесконечно малого элемента траектории $dl = R(x) d\varphi$, тогда бесконечно малое изменение координаты x , как следует из формулы для $R(x)$, равно

$$dx = \frac{mVL}{qB_0 x} \cos \varphi d\varphi.$$

Это соотношение можно привести к интегрируемому виду и далее проинтегрировать

$$d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{mVL}{qB_0} \cos \varphi d\varphi \Rightarrow x(\varphi) = \sqrt{\frac{2mVL}{qB_0}} \sin \varphi.$$

Максимальная глубина проникновения в магнитное поле, таким образом, равна

$$x_{\max} = \sqrt{\frac{2mVL}{qB_0}}.$$

Отсюда следует ответ на вопрос о глубине проникновения

$$\frac{L_e}{L_p} = \sqrt{\frac{m_e}{m_p}}.$$

Учитывая, что $dt = \frac{dx}{V \cos \varphi}$, из выражения для dx имеем соотношение $dt = \frac{mL}{qB_0 x} d\varphi$. Подставляем в это соотношение выражение для $x(\varphi)$, в результате имеем формулу

$$dt = \sqrt{\frac{mL}{2qB_0 V}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin \varphi}}.$$

Интегрируя эту формулу от 0 до $\frac{\pi}{2}$, получим время достижения максимальной глубины проникновения в поле, которое в два раза меньше времени разворота частицы. При этом для того, чтобы получить ответ на вопрос задачи, необязательно находить значение интеграла от функции $\frac{1}{\sqrt{\sin \varphi}}$. Значение этого интеграла будет одинаковым и для протона, и для электрона. Из этих рассуждений следует соотношение $\tau \sim \sqrt{m}$ и ответ $\tau_e = \tau_p \sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \approx \frac{1}{43}$ с.

9 Построение

На выданном вам дополнительном листе вы видите кривую, которая является действительным увеличенным изображением половины окружности в тонкой линзе, а также точку (точнее говоря, маленький кружок, лежащий на отрезке, стягивающем концы кривой), являющуюся изображением центра этой окружности. Постройте оптический центр линзы. Найдите фокусное расстояние и радиус окружности. Единицей измерения длины считайте длину стороны маленькой клетки на рисунке.

Построения следует делать на выданном вам дополнительном листе. Учтите, что при оценивании вашего решения будет учитываться только конечный результат, поэтому точность построений и вычислений в этой задаче критически важна.

Подсказка

Изображения радиусов, проведённых из центра в крайние точки полуокружности, одинаковы по размеру, значит, диаметр, стягивающий полуокружность, перпендикулярен главной оптической оси. Прямая через изображения концов радиуса, перпендикулярного оси, проходит через фокус.

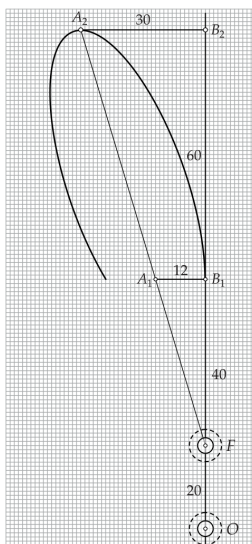
Ответ

$f = 20$, $R = 6$ (в клетках); оптический центр O — на рисунке решения (на главной оптической оси, на расстоянии 20 от фокуса F).

Решение

Существует несколько вариантов решения. Покажем один из них.

Поскольку изображения радиусов, проведённых из центра в крайние точки полуокружности, имеют одинаковый размер, диаметр, закрывающий полуокружность, перпендикулярен главной оптической оси.



При этом главная оптическая ось касается изображения в одной из крайних точек и совпадает с одной из линий сетки. Далее по рисунку определяем размер изображения радиуса, закрывающего полуокружность, получается $A_1B_1 = 12$. Далее определяем расстояние от дальней точки изображения до главной оптической оси $A_2B_2 = 30$ и расстояние между ближней и дальней точками изображения $B_2B_1 = 60$. Прямая A_1A_2 должна проходить через фокус. Из подобия треугольников получаем $B_1F = 40$.

Обозначим R — радиус исходной окружности, a_1 — расстояние от диаметра, закрывающего полуокружность, до линзы, f — фокусное расстояние. Тогда справедливы соотношения

$$\frac{R}{a_1} = \frac{12}{f+40} \Rightarrow a_1 = \frac{f+40}{12} \cdot R.$$

Аналогично для расстояния a_2 от ближней (к линзе) точки полуокружности до линзы имеем формулу

$$a_2 = \frac{f + 100}{30} \cdot R.$$

Далее записываем для точки изображения A_1 формулу линзы. Имеем уравнение

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f + 40} + \frac{1}{a_1}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для a_1 , получаем после преобразований соотношение

$$R = 0,3f.$$

Учитывая, что $a_1 = a_2 + R$, из выражений для a_1 и a_2 имеем уравнение

$$\frac{f + 100}{30} + 1 = \frac{f + 40}{12}.$$

Решая это уравнение и подставляя найденное значение $f = 20$ в соотношение $R = 0,3f$, получаем $R = 6$.

10 Сжатие насыщенного

В теплопроводящем цилиндре под поршнем при температуре окружающей среды T_0 находится один моль насыщенного пара воды. Жидкой воды в сосуде нет. Универсальная газовая постоянная и молярная масса воды равны $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ и $\mu = 18 \text{ г/моль}$. Плотность жидкой воды равна 1 г/см^3 .

А. (2 балла) Пусть объём под поршнем очень медленно уменьшается на 10% при постоянной температуре T_0 . Пренебрегая объёмом образующейся жидкой воды, определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(T)}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(T)}$. Удельная теплота парообразования воды равна L . В этой части задачи предполагается ответ в общем виде.

Зависимость давления насыщенного пара от температуры в некотором диапазоне температур даётся в таблицах, представленных ниже. Значения, указанные в этих таблицах, можно считать известными во всех следующих частях задачи.

$t, ^\circ\text{C}$	23	24	25	26	27	28	29	30
$p, \text{кПа}$	2,81	2,99	3,17	3,36	3,57	3,78	4,01	4,25

$t, ^\circ\text{C}$	31	32	33	34	35	36	37	38
$p, \text{кПа}$	4,50	4,76	5,03	5,32	5,63	5,95	6,28	6,63

Б. (2 балла) Определите значение удельной теплоты парообразования L при температуре 27°C .

В. (3 балла) Пусть состояние моля насыщенного пара воды, взятого при температуре 27°C , изменяется таким образом, что пар всё время остаётся насыщенным, при этом его объём уменьшается на 10%. Определите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(\text{нас})}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(\text{нас})}$ в этом случае.

Г. (4 балла) Представим, что объём моля насыщенного пара, взятого при температуре 27°C , уменьшается на 10% адиабатически. Найдите работу внешних сил, действующих на поршень $A_{\text{ext}}^{(Q)}$, а также изменение внутренней энергии содержимого сосуда $\Delta U^{(Q)}$ для этого случая.

Указание. На линии насыщения справедливо уравнение Клапейрона–Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \left(\frac{1}{\rho_{\text{г}}} - \frac{1}{\rho_{\text{ж}}} \right)},$$

где dP и dT — изменения давления и температуры на линии насыщения, L — удельная теплота парообразования, $\rho_{\text{г}}$ и $\rho_{\text{ж}}$ — плотность газовой фазы и плотность жидкой фазы вблизи линии насыщения при температуре T .

Подсказка

При постоянной температуре давление не меняется, а часть пара конденсируется: тепло конденсации равно изменению внутренней энергии минус работа внешних сил. Для L используйте конечные разности в уравнении Клапейрона–Клаузиуса. При адиабатическом сжатии проверьте, остаётся ли пар насыщенным.

Ответ

А. $A_{\text{ext}}^{(T)} = 0,1\nu_0 RT$, $\Delta U^{(T)} = -0,1\nu_0(\mu L - RT)$; Б. $L \approx 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$; В. $\Delta U^{(\text{нас})} \approx 50 \text{ Дж}$, $A_{\text{ext}}^{(\text{нас})} \approx 278 \text{ Дж}$; Г. $A_{\text{ext}}^{(Q)} = \Delta U^{(Q)} \approx 266 \text{ Дж}$.

Решение

А. Поскольку процесс происходит при постоянной температуре, давление под поршнем в процессе сжатия не меняется. Десятая часть количества водяного пара превращается в жидкость. Работа внешних сил равна

$$A_{\text{ext}}^{(T)} = 0,1 P_{\text{нас}} V = 0,1 \nu_0 R T,$$

где $\nu_0 = 1$ моль — количество вещества в сосуде под поршнем.

Количество теплоты, выделяющееся при конденсации 0,1 моля пара, равно

$$Q_{\text{cond}} = -0,1 \nu_0 \mu L.$$

С другой стороны, то же самое количество теплоты равно

$$Q_{\text{cond}} = \Delta U^{(T)} - A_{\text{ext}}^{(T)}.$$

Из этих формул следует второй ответ

$$\Delta U^{(T)} = -0,1 \nu_0 \mu L + A_{\text{ext}}^{(T)} = -0,1 \nu_0 (\mu L - R T).$$

Б. Удельная теплота парообразования может быть найдена при помощи уравнения Клапейрона–Клаузиуса. Заменив производную отношением конечных разностей, далее применяя уравнение Клапейрона для газовой фазы, имеем

$$L = \frac{\Delta P}{\Delta T} \left(\frac{R T^2}{P \mu} - \frac{T}{\rho_{\text{ж}}} \right).$$

Сделаем численную оценку слагаемых в скобках. Легко видеть, что второе слагаемое на 5 порядков меньше первого, так что им можно пренебречь. В итоге имеем соотношение

$$L = \frac{\Delta P}{\Delta T} \cdot \frac{R T^2}{P \mu}.$$

Вычисляя разность давлений для температур 27 °С и 28 °С, получаем ответ

$$L \approx 2,45 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

В. Преобразуем первое начало термодинамики, используя соотношение $\nu_0 R dT = P dV + V dP$, следующее из уравнения Клапейрона,

$$\delta Q = (c_V + R) \nu_0 dT - V dP.$$

Уравнение Клапейрона–Клаузиуса с учётом малости удельного объёма жидкости может быть преобразовано к виду

$$\frac{dP}{dT} = \frac{mL}{TV}.$$

Подставим dP из этого равенства в предыдущее соотношение. После преобразований получится формула для молярной теплоёмкости насыщенного пара

$$c = \frac{\delta Q}{\nu_0 dT} = (c_V + R) - \frac{L \mu}{T} = c_P - \frac{L \mu}{T}.$$

При небольшом (по сравнению с температурой T) изменении температуры ΔT , как следует из этой формулы, количество подведённой теплоты приближённо равно

$$Q = \nu_0 \left(c_P - \frac{L \mu}{T} \right) \Delta T.$$

Теперь следует выяснить, на сколько изменяется температура пара при уменьшении объёма одного моля пара на 10%. Это можно сделать, используя данные таблицы. Получится, что уменьшению объёма на 10% соответствует увеличение температуры на 2°C . Подставляя в формулу для Q значения $\Delta T = 2\text{ K}$, $T = 300\text{ K}$, $c_P = 4R$ (водяной пар — многоатомный газ), $L \approx 2,45 \cdot 10^6\text{ Дж/кг}$ (из предыдущего пункта), получаем для количества теплоты значение

$$Q \approx -228\text{ Дж.}$$

Изменение внутренней энергии равно

$$\Delta U^{(\text{нас})} = \nu_0 c_V \Delta T \approx 50\text{ Дж.}$$

Комбинируя эти результаты, получаем из первого начала термодинамики ответ

$$A_{\text{ext}}^{(\text{нас})} = \Delta U^{(\text{нас})} - Q \approx 278\text{ Дж.}$$

Г. Сначала сделаем оценку и поймём, остаётся пар насыщенным при адиабатическом уменьшении объёма или нет. Предположим, что пар становится ненасыщенным, тогда будем рассматривать его как идеальный газ. Показатель адиабаты для многоатомного газа равен $\gamma = \frac{4}{3}$, поэтому уравнение адиабаты для водяного пара может быть записано в виде

$$P(T) = P(T_0) \frac{T^4}{T_0^4},$$

где $P_0 = 3,57 \cdot 10^3\text{ Па}$, $T_0 = 300\text{ K}$. Сделаем расчёт по этой формуле и определим давление при температуре 28°C . Получится значение $P(301\text{ K}) \approx 3618\text{ Па}$. Это значение меньше значения давления насыщенного пара при температуре 28°C . Это означает, что с ростом температуры давление насыщенного пара растёт быстрее, чем растёт давление ненасыщенного пара в адиабатическом процессе. Таким образом, для ответа на вопросы этого пункта задачи следует определить изменение температуры ненасыщенного водяного пара как идеального газа при уменьшении объёма на 10%. Используем уравнение адиабаты в виде $TV^{1/3} = \text{const}$. Значение температуры при уменьшении объёма на 10% равно

$$T_1 = T_0 (0,9)^{-1/3} \approx 310,7\text{ K.}$$

Теперь, используя найденное значение T_1 , можно найти изменение внутренней энергии ненасыщенного пара

$$\Delta U^{(Q)} = \nu_0 \cdot 3R (T_1 - T_0) \approx 266\text{ Дж.}$$

Работа внешних сил равна изменению внутренней энергии

$$A_{\text{ext}}^{(Q)} = \Delta U^{(Q)} \approx 266\text{ Дж.}$$