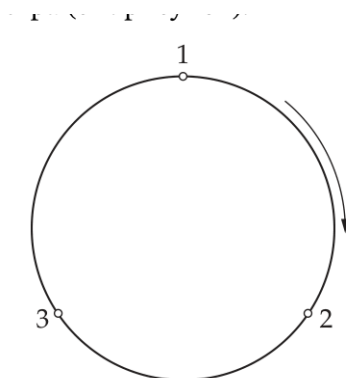


МОШ, 2023/24, заключительный этап, 7 класс

Условия, ответы и решения

1 На «стадионе»

Три маленьких тела изначально покоятся в трёх равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 метра (см. рисунок).



В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями: $v_1 = 4,0$ м/с, $v_2 = 3,6$ м/с, $v_3 = 3,0$ м/с (индекс в обозначении скорости соответствует номеру тела на рисунке). При этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 метра. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

Подсказка

Когда колонна короче всего? Подумайте, какие два тела сближаются быстрее всего, и посмотрите, что происходит с длиной колонны в момент их встречи.

Ответ

20 см.

Решение

Наименьшая длина колонны достигается в тот момент времени, когда самое быстрое тело встречается с самым медленным. Действительно, за миг до этого момента 1-е тело сокращало расстояние до 3-го тела. Где бы ни находилось в это время 2-е тело, «впереди» 3-го тела или «позади» 1-го, длина колонны уменьшалась. Сразу после встречи 1-го и 3-го тел длина колонны будет увеличиваться, при любом положении 2-го тела.

Впервые быстрое и медленное тела встретятся через время $\frac{2 \text{ м}}{4 \text{ м/с} - 3 \text{ м/с}} = 2 \text{ с}$ в том месте, откуда стартовало третье тело. К этому моменту 2-е тело пройдет расстояние 7,2 м и окажется «впереди» других тел на «расстоянии» 20 см. При дальнейшем движении первое и третье тела будут встречаться через каждые 3 с в одном и том же месте — точке старта третьего тела. За 3 с второе тело проходит 3 круга и 1,8 м. Следовательно, в момент второй встречи первого и

третьего тел второе тело находится на расстоянии $20 \text{ см} + 180 \text{ см} = 200 \text{ см}$ по ходу движения. Длина колонны в этом случае равна 100 см . В момент третьей встречи расстояние между вторым телом и двумя другими равно $200 \text{ см} + 180 \text{ см} - 300 \text{ см} = 80 \text{ см}$ по ходу движения. Длина колонны равна 80 см . Аналогично рассуждая, находим длину колонны в момент четвёртой, пятой и шестой встреч первого и третьего тел. В момент четвёртой встречи длина колонны равна 40 см (второе тело находится на таком расстоянии «позади» первого и третьего тел), в момент пятой встречи длина колонны равна 140 см (второе тело находится на таком расстоянии «впереди» первого и третьего тел). А в момент шестой встречи длина колонны составит 20 см и второе тело окажется в той же точке окружности, что и в момент первой встречи первого и третьего тел. Значит, в ходе дальнейшего движения тел всё будет повторяться. Следовательно, минимальная длина колонны равна 20 см .

2 Хороший, плохой

Города A и B соединены дорогой, которая состоит из двух участков: «хорошего» (с недавно сделанным ремонтом, где машины едут быстро) и «плохого» (со старым разбитым асфальтом, по которому машины едут медленно). В некоторый момент времени из города A в город B выезжает машина, затем машины продолжают выезжать каждые 30 секунд. По «хорошему» участку дороги все машины едут с одинаковой большой скоростью, а по «плохому» — с одинаковой маленькой скоростью. Если подсчитать среднее арифметическое скоростей всех автомобилей на дороге в некоторый момент, когда первая машина уже прибыла в город B , а последняя ещё не выехала из города A , то получится величина $u = 70 \text{ км/ч}$. Если же подсчитать среднее арифметическое скоростей только тех автомобилей на дороге, которые уже проехали половину расстояния между городами, то получится величина $u_2 = 60 \text{ км/ч}$. Найдите скорость автомобилей на «хорошем» участке дороги, если известно, что его длина превышает длину «плохого» участка.

Подсказка

Число машин на каждом участке пропорционально времени, которое машина на нём проводит. Выразите среднее арифметическое скоростей через среднюю скорость одной машины на этом отрезке пути.

Ответ

84 км/ч .

Решение

Пусть l_1, l_2 — длины «хорошего» и «плохого» участков дороги, v_1, v_2 — скорости автомобилей на этих участках. Пусть также Δt — временной интервал между автомобилями. Тогда дистанция между ближайшими автомобилями будет составлять $v_1 \Delta t$ на быстром отрезке и $v_2 \Delta t$ на медленном. Тогда на быстром отрезке в произвольный момент времени находится $N_1 = \frac{l_1}{v_1 \Delta t}$ автомобилей, а на медленном — $N_2 = \frac{l_2}{v_2 \Delta t}$. Среднее арифметическое их скоростей будет равно $u = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2}{N_1 + N_2}$, поскольку всего автомобилей $N_1 + N_2$. Имеем:

$$u = \frac{N_1 v_1 + N_2 v_2}{N_1 + N_2} = \frac{\frac{l_1}{v_1 \Delta t} v_1 + \frac{l_2}{v_2 \Delta t} v_2}{\frac{l_1}{v_1 \Delta t} + \frac{l_2}{v_2 \Delta t}} = \frac{l_1 + l_2}{\frac{l_1}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}}. \quad (1)$$

Отметим, что полученный результат совпадает со средней скоростью отдельного автомобиля на всей дистанции. Аналогичный результат справедлив для автомобилей на второй поло-

вине дистанции. Поскольку средняя скорость на второй половине ниже, чем на всей дистанции, ясно, что плохой отрезок дороги идёт в конце пути. Тогда вторая половина дороги состоит из участка плохой дороги протяжённостью l_2 и участка хорошей дороги протяжённостью $\frac{l_1 + l_2}{2} - l_2 = \frac{l_1 - l_2}{2}$. Средняя скорость на второй половине пути может быть найдена как

$$u_2 = \frac{\frac{l_1 + l_2}{2}}{\frac{l_1 - l_2}{2v_1} + \frac{l_2}{v_2}}. \quad (2)$$

Из соотношения (1) получаем

$$\frac{l_2}{v_2} = \frac{l_1 + l_2}{u} - \frac{l_1}{v_1}. \quad (3)$$

Из соотношений (2) и (3) имеем

$$\frac{l_1 + l_2}{2u_2} = \frac{l_1 - l_2}{2v_1} + \frac{l_2}{v_2} = -\frac{l_1 + l_2}{2v_1} + \frac{l_1 + l_2}{u}.$$

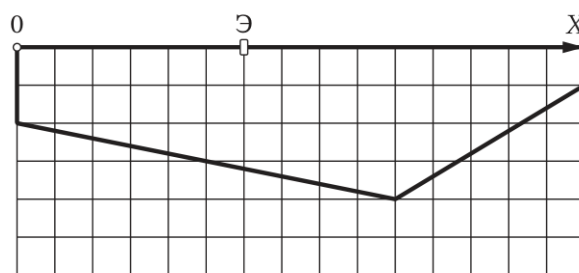
После сокращения на $l_1 + l_2$ получаем

$$\frac{1}{2u_2} = -\frac{1}{2v_1} + \frac{1}{u},$$

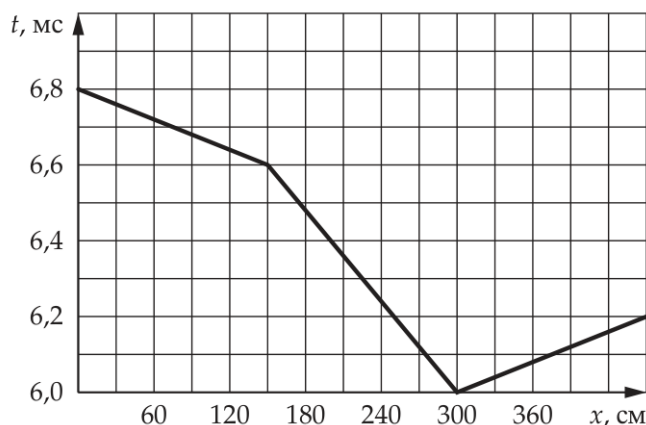
откуда $v_1 = \frac{uu_2}{2u_2 - u} = 84 \text{ км/ч}$.

3 Эхолот на льдине

На рисунке, представленном ниже, показан профиль участка покоящейся льдины (вид сбоку). Длина стороны клетки соответствует 30 см. На плоской горизонтальной поверхности льдины с помощью специального эхолота проводят измерения, располагая эхолот в точках с разными координатами по оси OX (см. рисунок).



Эхолот испускает звуковые сигналы вертикально вниз, а через некоторое время регистрирует отражённый от дна сигнал. Можно считать, что после отражения от дна сигнал распространяется вертикально вверх. На графике, представленном на втором рисунке, показана зависимость $t(x)$, где t — время, прошедшее с момента испускания звукового импульса эхолотом до момента приёма отражённого от дна сигнала, а x — координата эхолота.



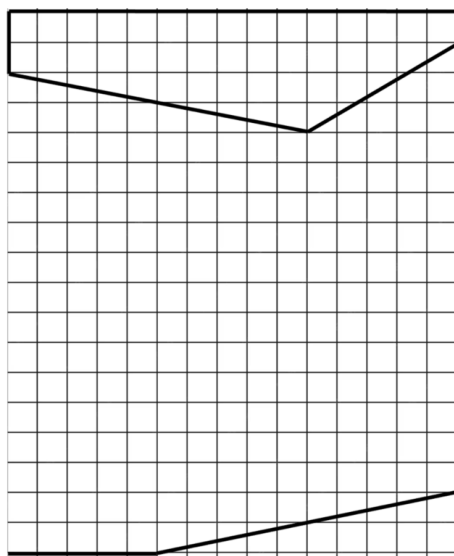
Постройте график зависимости расстояния от верхней поверхности льдины до дна от координаты x . Считайте, что средние скорости распространения звука в льдине и в воде равны 3000 м/с и 1500 м/с соответственно.

Подсказка

Сигнал идёт сначала через лёд, потом через воду, и обратно. Запишите время как функцию толщины льда и глубины дна и найдите дно в точках излома графика $t(x)$.

Ответ

Профиль дна — ломаная через точки $y(0) = 5,4$ м, $y(150) = 5,4$ м, $y(300) = 5,1$ м, $y(450) = 4,8$ м (см. рисунок).



Решение

Введём ось OY , направленную вертикально вниз, начало отсчёта которой совпадает с началом отсчёта оси OX . Так как профиль нижней поверхности льдины и график $t(x)$ представляют собой ломаные линии, следовательно, профиль дна водоёма тоже представляет собой ломаную линию. Покажем это. Пусть на некотором интервале оси OX профили нижней поверхности льдины и поверхности дна водоёма являются линейными функциями в зависимости от координаты x : $y_{\text{л}} = a_{\text{л}}x + b_{\text{л}}$ и $y_{\text{д}} = a_{\text{д}}x + b_{\text{д}}$ соответственно. Тогда

$$t(x) = 2 \cdot \left(\frac{a_{\text{л}}x + b_{\text{л}}}{v_{\text{л}}} + \frac{a_{\text{д}}x + b_{\text{д}} - a_{\text{л}}x - b_{\text{л}}}{v_{\text{в}}} \right),$$

где $v_{\text{л}}$, $v_{\text{в}}$ — скорости распространения звука в льдине и в воде соответственно. Видно, что $t(x)$ на данном интервале оси OX является линейной функцией.

Найдём координаты y поверхности дна при $x_1 = 0$ см, $x_2 = 150$ см, $x_3 = 300$ см и $x_4 = 450$ см, то есть в координатах концов трёх отрезков, из которых состоит график $t(x)$. Из уравнений

$$\begin{aligned} 6,8 \text{ мс} &= 2 \cdot \left(\frac{0,6 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(0) - 0,6 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right), \\ 6,6 \text{ мс} &= 2 \cdot \left(\frac{0,9 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(150) - 0,9 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right), \\ 6,0 \text{ мс} &= 2 \cdot \left(\frac{1,2 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(300) - 1,2 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right), \\ 6,2 \text{ мс} &= 2 \cdot \left(\frac{0,3 \text{ м}}{3000 \text{ м/с}} + \frac{y(450) - 0,3 \text{ м}}{1500 \text{ м/с}} \right), \end{aligned}$$

находим $y(0) = 5,4$ м, $y(150) = 5,4$ м, $y(300) = 5,1$ м и $y(450) = 4,8$ м.

Теперь достаточно соединить четыре найденные точки координатной плоскости XY .

4 Плотность Луны

Согласно закону всемирного тяготения материальная точка и однородный шар притягиваются друг к другу с силой $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$, где G — фундаментальная константа под названием гравитационная постоянная, m_1 , m_2 — массы материальной точки и шара соответственно, r — расстояние между материальной точкой и центром шара. Чему равна средняя плотность Луны, если средняя плотность Земли равна $5,5 \text{ г/см}^3$? Радиус Земли равен 6400 км , радиус Луны 1740 км . Ускорение свободного падения на Земле равно $9,8 \text{ Н/кг}$, а на Луне равно $1,6 \text{ Н/кг}$.

Подсказка

Выразите g на поверхности планеты через её среднюю плотность и радиус, считая планеты шарами.

Ответ

$3,3 \text{ г/см}^3$.

Решение

Рассмотрим материальную точку массой m , находящуюся на поверхности шарообразной планеты массой M . Силу тяжести, которая, с одной стороны, равна mg , можно также рассчитать, воспользовавшись законом всемирного тяготения $G \frac{mM}{R^2}$, где R — радиус планеты. Откуда находим $g = G \frac{M}{R^2}$. Ускорения свободного падения на Земле и на Луне равны соответственно:

$$g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2}, \quad g_{\text{л}} = G \frac{M_{\text{л}}}{R_{\text{л}}^2},$$

а их отношение —

$$\frac{g_3}{g_{\text{л}}} = \frac{M_3}{M_{\text{л}}} \cdot \frac{R_{\text{л}}^2}{R_3^2} = \frac{\rho_3 V_3}{\rho_{\text{л}} V_{\text{л}}} \cdot \frac{R_{\text{л}}^2}{R_3^2}. \quad (1)$$

Поскольку шарообразные планеты являются подобными телами (одну из них можно преобразовать в другую путём масштабирования), отношение их объёмов равно

$$\frac{V_3}{V_{\text{л}}} = \frac{R_3^3}{R_{\text{л}}^3}. \quad (2)$$

Из соотношений (4) и (5) получаем

$$\frac{g_3}{g_{\text{Л}}} = \frac{\rho_3 R_3}{\rho_{\text{Л}} R_{\text{Л}}} \Rightarrow \rho_{\text{Л}} = \rho_3 \cdot \frac{R_3}{R_{\text{Л}}} \cdot \frac{g_{\text{Л}}}{g_3} = 3,3 \text{ г/см}^3.$$