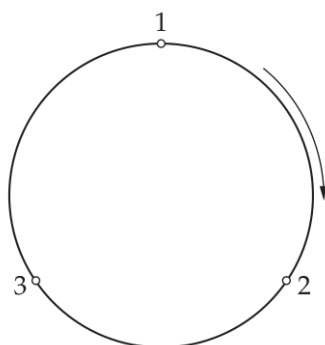


МОШ, 2023/24, заключительный этап, 8 класс

Условия, ответы и решения

1 На «стадионе»

Три маленьких тела изначально покоятся в трёх равноудаленных точках, принадлежащих окружности длиной 3 метра (см. рисунок).



В некоторый момент они одновременно начинают движение в одном направлении по окружности с постоянными скоростями, равными $v_1 = 4,0$ м/с, $v_2 = 3,6$ м/с, $v_3 = 3,0$ м/с (индекс в обозначении скорости соответствует номеру тела на рисунке). При этом тела не сталкиваются, проходя мимо друг друга. Колонной называется наименьшая дуга окружности, содержащая все три тела. Например, в начальном положении длина колонны равна 2 метра. Найдите минимальную длину колонны в процессе движения тел.

Подсказка

Когда колонна сокращается, а когда растёт? Подумайте, в какой момент сближаются крайние тела, и посмотрите, где в такие моменты оказывается среднее по скорости тело.

Ответ

20 см.

Решение

Наименьшая длина колонны достигается в тот момент, когда самое быстрое тело встречается с самым медленным. Действительно, за миг до этого момента 1-е тело сокращало расстояние до 3-го тела. Где бы ни находилось в это время 2-е тело, «впереди» 3-го тела или «позади» 1-го, длина колонны уменьшалась. Сразу после встречи 1-го и 3-го тел длина колонны будет увеличиваться, при любом положении 2-го тела.

Впервые быстрое и медленное тела встретятся через время $\frac{2 \text{ м}}{4 \text{ м/с} - 3 \text{ м/с}} = 2 \text{ с}$ в том месте, откуда стартовало третье тело. К этому моменту 2-е тело пройдёт расстояние 7,2 м и окажется «впереди» других тел на «расстоянии» 20 см. При дальнейшем движении первое и третье тела будут встречаться через каждые 3 с в одном и том же месте — точке старта третьего тела. За 3 с второе тело проходит 3 круга и 1,8 м. Следовательно, в момент второй встречи первого и третьего тел второе тело находится на расстоянии $20 \text{ см} + 180 \text{ см} = 200 \text{ см}$ по ходу движения.

Длина колонны в этом случае равна 100 см. В момент третьей встречи расстояние между вторым телом и двумя другими равно $200 \text{ см} + 180 \text{ см} - 300 \text{ см} = 80 \text{ см}$ по ходу движения. Длина колонны равна 80 см. Аналогично рассуждая, находим длину колонны в момент четвёртой, пятой и шестой встреч первого и третьего тел. В момент четвёртой встречи длина колонны равна 40 см (второе тело находится на таком расстоянии «позади» первого и третьего тел), в момент пятой встречи длина колонны равна 140 см (второе тело находится на таком расстоянии «впереди» первого и третьего тел). А в момент шестой встречи длина колонны составит 20 см и второе тело окажется в той же точке окружности, что и в момент первой встречи первого и третьего тел. Значит, в ходе дальнейшего движения тел всё будет повторяться. Следовательно, минимальная длина колонны равна 20 см.

2 Акациевый мёд

На расстоянии 600 м от пчелиного улья растёт акация, откуда каждая пчела переносит в улей 30 мм^3 нектара за один полёт. При производстве мёда пчёлы испаряют часть содержащейся в нектаре воды, составляющей 60% его массы. В результате содержание воды в мёде уменьшается до 20% от его массы. Пчёлы получают энергию, необходимую для испарения воды, употребляя часть принесённого нектара. За 10 дней цветения пчелиная семья произвела 20 кг мёда. Определите среднюю мощность, затрачиваемую пчёлами только на испарение воды. Какое общее расстояние пролетели пчёлы, собирая нектар и переноса его в улей? Плотность нектара равна $1,2 \text{ г/см}^3$. Известно, что 1 кг нектара обеспечивает пчёлам 6,0 МДж энергии, а для испарения 1 кг воды пчёлам требуется затратить 2,4 МДж энергии. Считайте, что от улья до акации и обратно пчёлы летают по прямой.

Подсказка

Сухой остаток нектара не меняется при выпаривании: по нему найдите массу исходного нектара. Не забудьте, что часть нектара пчёлы сами съедают, поэтому принести пришлось больше.

Ответ

$P = 56 \text{ Вт}; s = 1,6 \cdot 10^9 \text{ м}.$

Решение

В 20 кг мёда содержится 4 кг воды, следовательно, масса «сухого» нектара (который не содержит воды) равна 16 кг. Пусть x — масса нектара, из которого сделали 20 кг мёда, тогда $0,4x = 16 \text{ кг}$. Стало быть, $x = 40 \text{ кг}$. Всего пчёлы испарили $40 \cdot 0,6 - 4 = 20 \text{ кг}$ воды, на что потребовалось 48 МДж энергии. Средняя мощность, затрачиваемая пчёлами только на испарение воды, равна

$$P = \frac{20 \text{ кг} \cdot 2,4 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}}{10 \cdot 24 \cdot 3600 \text{ с}} = 56 \text{ Вт}.$$

Масса съеденного пчёлами нектара равна

$$m = \frac{48 \text{ МДж}}{6,0 \text{ МДж/кг}} = 8 \text{ кг}.$$

Следовательно, всего пчёлы перенесли 48 кг нектара. При этом было совершено

$$\frac{48 \text{ кг}}{1200 \text{ кг/м}^3 \cdot 30 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3} \approx 1,33 \cdot 10^6$$

полётов. За каждый полёт пчела пролетает 1200 м, поэтому общее расстояние, которое пролетели пчёлы, равно $1200 \text{ м} \cdot 1,33 \cdot 10^6 = 1,6 \cdot 10^9 \text{ м}.$

3 Солевой раствор

При смешивании карбоната натрия (соды) массой m_1 и пресной воды массой m_2 получается солевой раствор. Если процентное содержание соды в растворе, равное $\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$, принимает значения от 1% до 14%, то плотность раствора карбоната натрия можно рассчитать, воспользовавшись приближенной формулой

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha),$$

где ρ_0 плотность пресной воды, равная $1,0 \text{ г/см}^3$. В цилиндрическом сосуде находится водный раствор карбоната натрия плотностью $1,12 \text{ г/см}^3$, уровень которого расположен на высоте $15,0 \text{ см}$ от дна сосуда. В раствор добавляют некоторое количество льда, при этом уровень жидкости в сосуде поднялся на $5,0 \text{ см}$. Когда лёд растаял, жидкость перемешали, и процентное содержание карбоната натрия в растворе уменьшилось. Найдите плотность получившегося раствора. На какой высоте расположен уровень раствора в сосуде?

Подсказка

Лёд плавает, не касаясь дна, поэтому давление на дно равно весу всего содержимого, делённому на площадь. Как изменилась масса содержимого, когда уровень вырос с 15 до 20 см ?

Ответ

$1,09 \text{ г/см}^3$; $20,6 \text{ см}$.

Решение

Пусть первоначальная масса солевого раствора равна M , а давление жидкости на дно сосуда p . После добавления льда уровень жидкости поднялся с высоты $15,0 \text{ см}$ на высоту $20,0 \text{ см}$ от дна, следовательно, давление жидкости на дно сосуда стало равным $\frac{4}{3}p$. Так как лёд плавает и не касается дна сосуда, стало быть, масса солевого раствора со льдом будет равна $\frac{4}{3}M$. Первоначальная концентрация соды в солевом растворе была равна 12% . После того, как лёд растает, концентрация соли составит $\frac{3}{4}$ от первоначального значения, то есть 9% . Новая плотность солевого раствора равна $1,09 \text{ г/см}^3$. Поскольку масса вещества в сосуде при таянии льда не меняется, то и давление на дно сосуда остаётся неизменным:

$$1,12 \text{ г/см}^3 \cdot 20,0 \text{ см} = 1,09 \text{ г/см}^3 \cdot H,$$

где H — новая высота уровня жидкости от дна сосуда. Откуда находим

$$H = \frac{1,12 \text{ г/см}^3 \cdot 20,0 \text{ см}}{1,09 \text{ г/см}^3} = 20,6 \text{ см}.$$

4 Запотевший сосуд

В холодильной камере при температуре 0°C находится сосуд с водой и льдом. Если переместить этот сосуд в помещение, то на стенках сосуда к моменту, когда весь лёд растает, образуются капельки сконденсированной воды (сосуд запотеваает). Масса воды, сконденсированной на стенках сосуда, зависит от температуры воздуха в комнате. Например, если температура воздуха в комнате равна 22°C , то сконденсируется 23 г воды, а при температуре 30°C сконденсируется 18 г воды. Определите массу льда в сосуде. Удельная теплота плавления льда равна 330 кДж/кг , а удельная теплота парообразования воды $2,3 \text{ МДж/кг}$. Считайте, что конвекция отсутствует, мощность теплообмена пропорциональна разности температур сосуда с его содержимым и воздуха, а скорость образования конденсата в обоих случаях одинаковая.

Подсказка

Лёд получает тепло от воздуха и от конденсирующегося пара. Время таяния пропорционально массе конденсата, так как он образуется с постоянной скоростью. Запишите баланс для обеих комнатных температур.

Ответ

$M = 680$ г.

Решение

Сосуд с содержимым получает тепло благодаря двум процессам: теплообмену с окружающим воздухом и конденсации воды на стенках сосуда. Количество теплоты, которое получает сосуд с его содержимым от воздуха посредством теплообмена, равно $Q_{\text{тепл}} = \alpha (t_{\text{к}} - t_0) \tau$, где α — коэффициент пропорциональности, $t_{\text{к}}$ — комнатная температура, $t_0 = 0^\circ\text{C}$, τ — время таяния льда. Так как скорость образования конденсата в обоих случаях одинаковая и постоянна, следовательно, масса конденсата на стенках сосуда пропорциональна времени процесса: $m = \beta \tau$, где β — коэффициент пропорциональности, одинаковый для обоих процессов. Стало быть, отношение времён таяния льда при комнатной температуре 22°C и при комнатной температуре 30°C равно

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Запишем уравнение теплового баланса для первого и второго процессов:

$$\begin{aligned}\alpha (t_{\text{к1}} - t_0) \tau_1 + L m_1 &= \lambda M, \\ \alpha (t_{\text{к2}} - t_0) \tau_2 + L m_2 &= \lambda M,\end{aligned}$$

где M — масса растаявшего льда. Решая систему уравнений, получаем

$$M = \frac{L m_1 m_2 (t_{\text{к2}} - t_{\text{к1}})}{\lambda (m_2 (t_{\text{к2}} - t_0) - m_1 (t_{\text{к1}} - t_0))} = 680 \text{ г.}$$