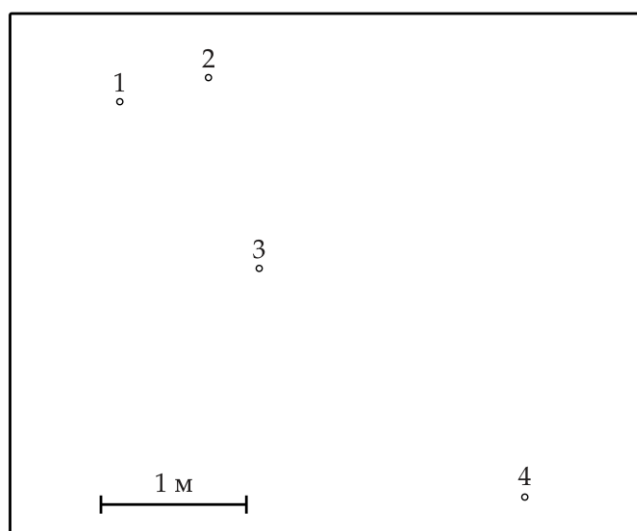


МОШ, 2023/24, заключительный этап, 9 класс

Условия, ответы и решения

1 Построение

Обруч скользит по гладкой горизонтальной поверхности так, что плоскость обруча остаётся горизонтальной. Скорость оси обруча и частота его обращения вокруг этой оси, равная одному обороту в секунду, со временем не меняются. В некоторой точке обруча закреплена лампочка, ярко вспыхивающая через равные промежутки времени с частотой 4 раза в секунду. На фотографии, сделанной сверху с большой выдержкой, с сохранением пропорций изображаемых предметов, можно видеть положение лампочки во время вспышек, следующих друг за другом. Рисунок, представленный ниже (увеличенную версию см. на дополнительном листе), выполнен по фотографии, на нём точками обозначены места вспышек, а цифрами их номера в порядке появления.



Используя линейку с делениями и циркуль, найдите скорость оси и радиус обруча. Отрезок, соответствующий расстоянию в 1 метр, показан в нижней части рисунка.

Подсказка

За время между вспышками обруч поворачивается на четверть оборота. Как по двум точкам, отстоящим на пол-оборота, найти положение оси обруча?

Ответ

$$R = (0,75 \pm 0,05) \text{ м}, v = (5,7 \pm 0,5) \text{ м/с}.$$

Решение

Задача может быть решена разными способами. Покажем один из них, наиболее простой по мнению автора.

Пусть $\{\mathbf{r}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ — совокупность радиус-векторов точек, изображённых на рисунке, в некоторой системе координат; $\{\mathbf{R}_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4$ — совокупность радиус-векторов точек, изображающих центр диска в моменты вспышек. Обозначим $\mathbf{a}$ — вектор, проведённый из точки, изображающей центр диска, к точке, изображающей лампочку в моменты первой вспышки, вектор $\mathbf{b}$ — аналогичный вектор для момента второй вспышки.

Справедливы соотношения

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_3 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{v} \cdot 2t - \mathbf{a},$$

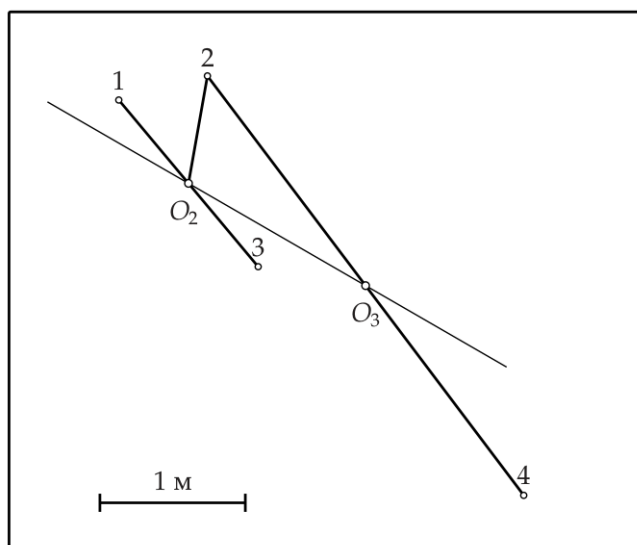
в которых $\mathbf{v}$ — скорость движения центра диска. Для моментов второй и четвёртой вспышек верны соотношения

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{r}_4 = \mathbf{R}_2 + \mathbf{v} \cdot 2t - \mathbf{b}.$$

Из этих соотношений следуют формулы

$$\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{v} \cdot t = \mathbf{R}_2, \quad \frac{\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4}{2} = \mathbf{R}_3.$$

Легко видеть, что полусумма векторов $\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3}{2}$ — есть радиус-вектор середины отрезка, соединяющего точки 1 и 3. Отсюда следует вывод о том, что точка, изображающая центр диска в момент второй вспышки, совпадает с серединой отрезка 13. Аналогично, точка, изображающая центр диска в момент третьей вспышки, совпадает с серединой отрезка 24.



Таким образом, построение содержит следующие шаги. Строим середины отрезков 13 и 24 (точки O_2 и O_3 соответственно на рисунке). Длина отрезка $O_2 2$ равна радиусу диска. За четверть секунды точка, изображающая центр диска, проходит путь, соответствующий длине отрезка $O_2 O_3$.

Измерения по чертежу, сделанные после построений при помощи линейки, дают $O_2 2 = 34,5$ мм, $O_2 O_3 = 64,5$ мм. Сравнив при помощи линейки найденные длины с длиной отрезка, соответствующего длине 1 метр (45 мм), получаем искомые величины

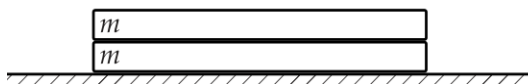
$$R \approx \frac{34,5}{45} \text{ м} = 0,75 \text{ м}, \quad v \approx \frac{64,5}{45} \cdot 4 \text{ м/с} \approx 5,7 \text{ м/с}.$$

2 И покой, и скольжение

Изучая силу трения в рамках школьного курса физики, обычно говорят о том, что максимальное значение силы трения покоя равно силе трения скольжения. На самом деле, для того, чтобы вывести тело из состояния покоя, необходимо приложить силу несколько большую силы трения скольжения. Поэтому имеет смысл говорить о двух коэффициентах: коэффициенте трения покоя μ_r и коэффициенте трения скольжения μ_s ($\mu_s < \mu_r$). Сила трения покоя удовлетворяет соотношению $F_{\text{тр.пок.}} \leq \mu_r N$. После перехода к скольжению для определения силы трения используется другой коэффициент $F_{\text{тр.ск.}} = \mu_s N$.

А. (4 балла) Для деревянного бруска массой m , располагающегося на протяжённой деревянной горизонтальной поверхности, коэффициенты трения покоя и скольжения равны $\mu_r = 0,5$ и $\mu_s = 0,4$ соответственно. На брусок начинает действовать периодически изменяющаяся горизонтальная сила, проекция которой на горизонтальную ось OX на первой половине периода равна $F_x^{(1)} = 1,001\mu_r mg$, а на второй половине периода меняет знак и становится равна $F_x^{(2)} = -1,001\mu_r mg$. Изобразите графически зависимость скорости бруска от времени в течение двух периодов спустя большое время после начала процесса. Период изменения силы равен $T = 4$ с, ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 .

Б. (5 баллов) Две доски одинаковой массы m лежат друг на друге и на длинном горизонтальном деревянном столе (см. рисунок). Коэффициенты трения покоя и скольжения между всеми поверхностями равны $\mu_r = 0,5$ и $\mu_s = 0,4$.



Б1) (2 балла) На верхнюю доску действует внешняя горизонтальная сила $F(t)$, прямо пропорциональная времени $F(t) = \frac{\mu_r mg t}{t_0}$. Изобразите график зависимости ускорения верхней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

Б2) (3 балла) Пусть теперь внешняя горизонтальная сила $F(t) = \frac{\mu_r mg t}{t_0}$ действует на нижнюю доску. Изобразите график зависимости ускорения нижней доски от времени для $t \in [0, 4t_0]$.

В обоих случаях доски изначально покоятся. В процессе движения одна доска не падает с другой.

Подсказка

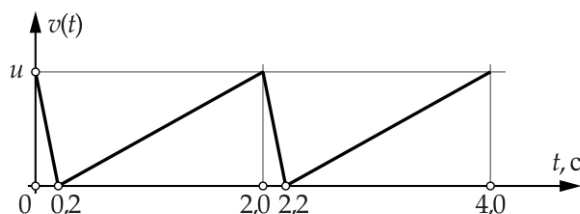
Пока сила чуть превышает максимум трения покоя, брусок сначала «срывается» с места, а как только сила меняет знак, начинает тормозиться почти вдвое сильнее. Для досок выясните по порядку: когда начнёт двигаться каждая доска и когда начнётся проскальзывание между ними.

Ответ

А) график скорости — пилообразный периодический, максимальное значение $u = 1,8 \text{ м/с}$; Б1) $a = 0$ при $t < t_0$, далее $a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g$, до 16 м/с^2 при $t = 4t_0$; Б2) $a = 0$ при $t < 2t_0$, затем $a(t) = \frac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g$ (от 1 до 5 м/с^2 при $t = 3,6t_0$), затем $a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g$ (от 6 до 8 м/с^2 при $t = 4t_0$).

Решение

А. Анализ показывает, что в каждый момент времени брусок движется с ускорением, которое по абсолютной величине может быть равно $a_1 \approx (\mu_r - \mu_s)g = 1 \text{ м/с}^2$ или $a_2 \approx (\mu_r + \mu_s)g = 9 \text{ м/с}^2$. Спустя длительное время после начала процесса установится квазистационарный режим, и проекция скорости бруска в зависимости от времени будет меняться периодически. В течение периода за время $\tau = \frac{T}{20}$ модуль скорости бруска уменьшается от значения u до нуля, а затем за время 9τ увеличивается от нуля до u (см. рисунок ниже, $\tau = 0,2 \text{ с}$). Значение максимальной скорости в квазистационарном режиме равно $u = 1,8 \text{ м/с}$.



Можно дать доказательство того факта, что спустя длительное время после начала процесса устанавливается квазистационарный режим. Действительно, обозначим v_k — значение модуля скорости бруска спустя время $\frac{kT}{2}$ после начала процесса. Справедливо рекуррентное соотношение

$$v_{k+1} = 2 \text{ м/с} - \frac{v_k}{9}, \quad (1)$$

при этом $v_1 = 2 \text{ м/с}$. Введём обозначение $w_k = v_k - u$, где $u = 1,8 \text{ м/с}$. Из формулы (4) следует соотношение

$$w_{k+1} = -\frac{w_k}{9},$$

а из него формула для $(k+1)$ -го члена последовательности

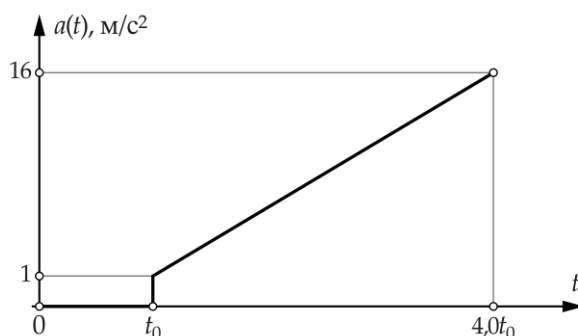
$$w_{k+1} = 0,2 \cdot \frac{(-1)^k}{9^k},$$

которая является убывающей геометрической прогрессией. Легко видеть, что предел последовательности $\{w_k\}$ при $k \rightarrow \infty$ равен нулю. Это означает, что при больших k значение v_k стремится к u .

Б. Б1) Сразу заметим, что нижняя доска при любом значении внешней силы будет оставаться в покое, поскольку максимальное значение силы трения покоя, действующей на неё со стороны стола, равно $2\mu_r mg$, а максимальная сила, действующая на нижнюю доску со стороны верхней равна $\mu_r mg$. Таким образом, при значении внешней силы меньше $\mu_r mg$ ускорение верхней доски равно нулю, а при значении больше $\mu_r mg$ равно

$$a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - \mu_s g. \quad (2)$$

Искомый график изображён на рисунке, представленном ниже.



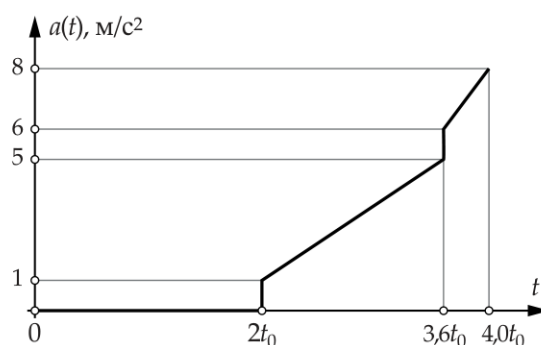
Б2) В этом случае движение начнётся, когда внешняя сила станет больше значения $2\mu_r mg = mg$, это произойдёт в момент времени $t_1 = 2t_0$, далее верхняя доска будет двигаться совместно с нижней с ускорением, даваемым формулой $a(t) = \frac{\mu_r g t}{2t_0} - \mu_s g$, похожей на формулу (5). Позднее в некоторый момент времени начнётся проскальзывание верхней доски по нижней. Значение внешней силы в этот момент будет удовлетворять соотношению

$$\frac{F - 2\mu_s mg}{2m} \cdot m = \mu_r mg. \quad (3)$$

Решив уравнение (6), находим критическое значение силы $F = 2(\mu_s + \mu_r)mg = 1,8mg$. Этого значения сила достигает в момент времени $t = 3,6t_0$. Далее нижняя доска будет двигаться с ускорением, большим ускорения верхней доски. Зависимость ускорения нижней доски от времени в этом случае будет задаваться формулой

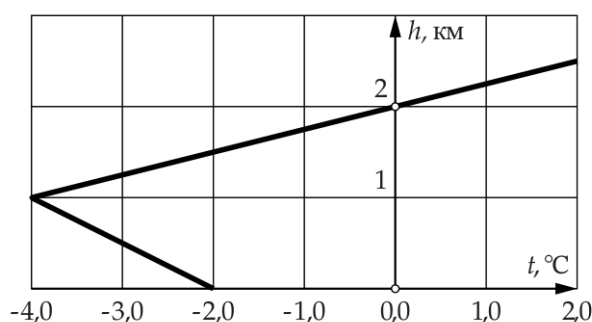
$$a(t) = \frac{\mu_r g t}{t_0} - 3\mu_s g. \quad (4)$$

Искомый график можно видеть на рисунке, представленном ниже.



3 Замерзающие капли

При *температурной инверсии* график зависимости температуры воздуха t вблизи поверхности Земли от высоты h может иметь вид, показанный на рисунке линией чёрного цвета увеличенной толщины.



Пусть капля, имеющая форму шара, движется вниз с постоянной скоростью под действием силы тяжести и силы сопротивления воздуха. На высоте $h_0 = 2$ км температура капли оказывается равна $t_c = 0^\circ\text{C}$. В процессе дальнейшего падения часть капли (или вся капля) превращается в лёд вследствие теплообмена с холодным атмосферным воздухом.

Мощность теплообмена P и сила сопротивления воздуха F_d даются формулами

$$P = \alpha(t_c - t)S, \quad F_d = \beta S v^2,$$

где S — площадь поверхности капли, α и β — некоторые константы, t и t_c — температуры окружающего воздуха и капли (на одной высоте), v — скорость капли.

Рассмотрим две капли. Радиус первой капли в 2,25 раз меньше радиуса второй. В процессе падения с высоты 2 км первой капли четверть её массы превращается в лёд. Какая часть массы второй капли превратится в лёд?

Считайте теплопроводность льда высокой, так что температура всех точек капли остаётся одинаковой, пока капля полностью не превратилась в лёд. Изменением радиуса капли при её частичном превращении в лёд можно пренебречь.

Подсказка

Выпишите, какая масса замерзает за малое перемещение капли по высоте, и просуммируйте по всему пути: что в этой сумме не зависит от размера капли?

Ответ

$$n = \frac{2}{27} \approx 7,4\%.$$

Решение

Обозначим $\Delta T(h) = t_c - t(h)$ — разность температур капли и окружающей среды на высоте h (большая буква используется для обозначения разности температур, чтобы избежать путаницы с временем). Пусть за малое время Δt замерзает небольшая масса капли Δm , тогда справедливо соотношение

$$\lambda \Delta m = \alpha \Delta T(h) S \Delta t.$$

Пусть скорость капли равна v , тогда это соотношение можно переписать в виде

$$\frac{\lambda v \Delta m}{\alpha S} = \Delta T(h) \Delta h. \quad (1)$$

При суммировании выражений, стоящих в правой части формулы (8), получается величина, численно равная площади фигуры, ограниченной графиком профиля температуры, осями абсцисс и ординат. Эта площадь не зависит от размера капли и скорости её падения. Таким образом, суммарная масса, превращающаяся в лёд в процессе падения, пропорциональна площади её поверхности и обратно пропорциональна скорости падения

$$m \propto \frac{S}{v} \propto \frac{R^2}{v}. \quad (2)$$

Символ « $\propto$ » означает пропорциональность. Скорость падения определяется из равенства силы сопротивления и силы тяжести:

$$Mg = \beta S v^2 \Rightarrow v^2 \propto \frac{\rho V}{S} \propto R. \quad (3)$$

Комбинируя соотношения (9), (10) и учитывая, что масса капли пропорциональна R^3 , получаем для доли замерзающей массы соотношение

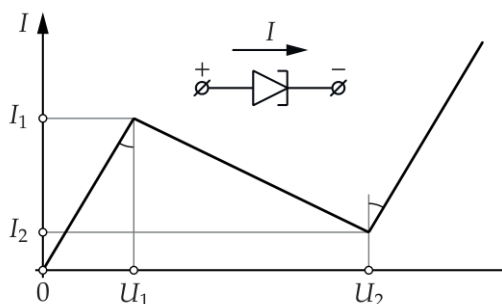
$$n = \frac{m}{M} \propto \frac{R^{3/2}}{R^3} \propto R^{-3/2}. \quad (4)$$

Из формулы (11) следует, что доля массы большой капли, превращающаяся в лёд, равна

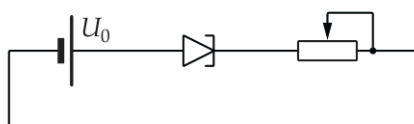
$$n = \frac{1}{4} \cdot (2,25)^{-3/2} = \frac{2}{27} \approx 7,4\%.$$

4 Схемы с туннельным диодом

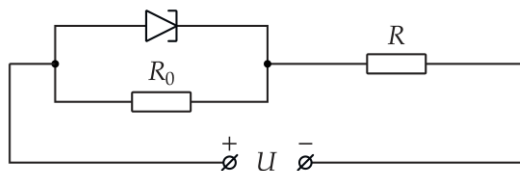
Идеализированная вольт-амперная характеристика нелинейного элемента под названием *туннельный диод* изображена на рисунке, представленном ниже. Условное обозначение туннельного диода на схемах показано в верхней части рисунка. Там же над символом диода указано положительное направление тока через него. Обозначенные на графике токи и напряжения I_1 , I_2 , U_1 и U_2 будем называть параметрами диода. Обозначенные на графике углы считаем равными.



А. (2 балла) Рассмотрим туннельный диод, параметры которого равны $I_1 = 4I_2 = 4i$, $U_2 = 4U_1 = 4u$, при этом значения i и u считаются известными. Этот диод подключили к идеальному источнику с напряжением $U_0 = 6u$, последовательно с переменным резистором, сопротивление которого может меняться в широких пределах (см. рисунок, представленный ниже). При каких значениях сопротивления резистора значение тока в цепи определяется однозначно?



Б. (5 баллов) Параметры другого туннельного диода равны $I_1 = 1 \text{ мА}$, $I_2 = 10 \text{ мА}$, $U_1 = 0,2 \text{ В}$, $U_2 = 0,8 \text{ В}$. При помощи этого диода и балластного резистора R_0 собрали цепь по схеме, показанной на рисунке.



Известно, что ток через резистор R в этой цепи имеет одно и то же значение при любом входном напряжении из диапазона $U = 3,2 \pm 0,2 \text{ В}$.

Б1) (2 балла) Найдите сопротивление балластного резистора R_0 .

Б2) (3 балла) Чему может быть равно сопротивление нагрузки R ? Укажите границы диапазона возможных значений $R_{\min}$ и $R_{\max}$.

Подсказка

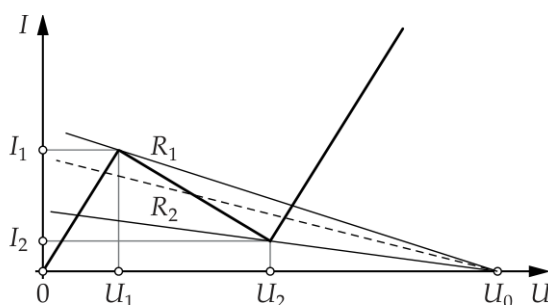
Ток через R постоянен, если вольт-амперная характеристика параллельного соединения диода и R_0 имеет горизонтальный участок. В пункте А постройте нагрузочную прямую $U = U_0 - IR$ и найдите предельные наклоны, при которых она пересекает характеристику один раз.

Ответ

А) $R > \frac{2u}{i}$ или $R < \frac{5u}{4i}$; Б1) $R_0 \approx 66,7 \text{ Ом}$; Б2) $201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом}$.

Решение

А. Обозначим $V(I)$ зависимость напряжения на туннельном диоде от текущего через него тока. Тогда ток в рассматриваемой цепи определяется уравнением $U_0 - IR = V(I)$, количество решений которого зависит от величины параметра R . Графический метод решения этого уравнения состоит в определении координат точки (или точек) пересечения вольт-амперной характеристики и прямой $U = U_0 - IR$. На графике, представленном ниже, пунктирной линией показана прямая, соответствующая такому значению сопротивления, при котором ток цепи определяется неоднозначно (уравнение имеет три решения). Тонкими сплошными линиями чёрного цвета показаны прямые, соответствующие таким значениям сопротивления R_1 и R_2 , что уравнение имеет два решения.



Легко видеть, что искомые значения сопротивления, при которых ток в цепи определяется однозначно, даются неравенствами

$$R < R_1, \quad R > R_2.$$

Теперь остаётся определить значения R_1 и R_2 . Значение R_1 определяется из уравнения

$$u = 6u - 4i \cdot R_1. \quad (1)$$

Аналогичное уравнение можно записать и для определения значения R_2

$$4u = 6u - i \cdot R_2. \quad (2)$$

Решая уравнения (12) и (13), получаем ответы:

$$R > \frac{2u}{i}, \quad R < \frac{5u}{4i}.$$

Б. Параллельное соединение туннельного диода и резистора может обеспечить постоянный ток в этой цепи (в некотором диапазоне напряжений) в том случае, если вольт-амперная характеристика этого параллельного соединения имеет горизонтальный участок, что реализуется при значении сопротивления балластного резистора, равном

$$R_0 = \frac{U_2 - U_1}{I_1 - I_2} = \frac{600}{9} \text{ Ом} \approx 66,7 \text{ Ом}.$$

Теперь можем легко вычислить постоянное значение тока через нагрузку

$$I_{\text{const}} = I_1 + \frac{U_1}{R_0} = 13 \text{ мА.}$$

Обозначим минимальное входное напряжение $U_{\text{min}} = 3,0 \text{ В}$, тогда значение тока I_{const} через нагрузку реализуется при следующих значениях сопротивления нагрузки

$$\frac{U_{\text{min}} - U_2}{I_{\text{const}}} \leq R \leq \frac{U_{\text{min}} - U_1}{I_{\text{const}}}, \quad (3)$$

Вычислив значения в формуле (14) и округлив до целого, получим неравенства

$$170 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом.} \quad (4)$$

Рассуждая аналогично, можем рассчитать диапазон возможных значений сопротивления нагрузки для максимального входного напряжения $U_{\text{max}} = 3,4 \text{ В}$. Получится двойное неравенство

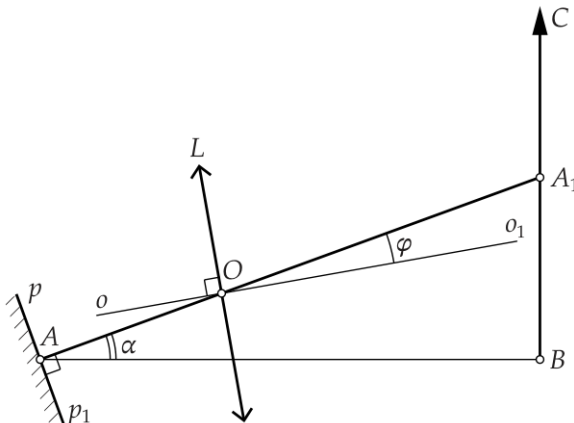
$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 246 \text{ Ом.} \quad (5)$$

Пересечение отрезков (15) и (16) даёт ответ на вопрос задачи:

$$201 \text{ Ом} \leq R \leq 215 \text{ Ом.}$$

5 Tilt-Shift

Конструкция фотографического Tilt-shift объектива позволяет наклонять и сдвигать оптическую ось объектива относительно линии зрения (линии, соединяющий фотоаппарат и объект съёмки). Наклон оптической оси даёт возможность получать резкие изображения протяжённых предметов, разные точки которых находятся на разном расстоянии от фотоаппарата.



На упрощённой схеме, представленной на рисунке, собирающая линза L символизирует объектив. Главная оптическая ось объектива oo_1 отклонена на угол φ от линии зрения AA_1 , составляющей угол α с горизонталью. Фотографируемый предмет изображается отрезком BC , pp_1 — плоскость, в которой располагается светочувствительная матрица фотоаппарата (или плёнка, если речь идёт о плёночной камере).

Пусть известны расстояние $AB = 5 \text{ м}$ по горизонтали между матрицей фотоаппарата и предметом, фокусное расстояние объектива $f = 50 \text{ мм}$, а также угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$ между линией зрения и горизонталью. Угол поворота главной оптической оси φ подобран так, чтобы все точки светящегося отрезка BC изображались в плоскости матрицы фотоаппарата pp_1 максимально резко. Найдите угол φ , считая его малым.

Указание. Для малого угла β ($|\beta| \ll 1$) справедливы приближённые соотношения

$$\sin \beta \approx \beta, \quad \text{tg } \beta \approx \beta, \quad \cos \beta \approx 1.$$

Подсказка

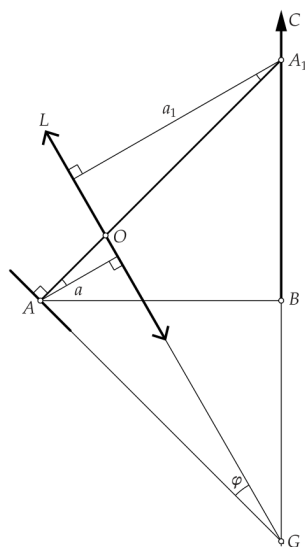
Изображение отрезка BC лежит в плоскости матрицы, если прямые, на которых лежат предмет, линза и матрица, пересекаются в одной точке. Используйте это и формулу линзы для точки A .

Ответ

$$\varphi = \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ \text{ (здесь } L = AB\text{)}.$$

Решение

Для того чтобы изображение предмета получалось наиболее резким, необходимо, чтобы прямые, на которых лежат предмет BC , отрезок, символизирующий плоскость плёнки, и линза пересекались в одной точке. В этом случае изображение предмета будет полностью лежать в плоскости плёнки. Обозначим буквой G точку, в которой пересекаются описанные прямые (см. рисунок).



Искомый угол обозначен дугой на рисунке; a и a_1 — длины перпендикуляров, опущенных из точек A и A_1 на линзу. Длины a и a_1 связаны формулой линзы

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a_1}. \quad (1)$$

При этом, поскольку искомый угол φ мал ($\cos \varphi \approx 1$), справедливы равенства $a \approx AO$ и $a_1 \approx A_1O$, и как следствие, равенство

$$a + a_1 = AA_1 = \frac{L}{\cos \alpha} = L\sqrt{2}, \quad (2)$$

в котором введено обозначение $L = AB$.

Решая уравнения (17) и (18) как систему, отбираем решение, не противоречащее физическому смыслу

$$a = L\sqrt{2} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\sqrt{2}f}{2L}}}{2} \approx L\sqrt{2} \cdot \frac{4\sqrt{2}f}{4 \cdot 2L} = f. \quad (3)$$

При записи последней цепочки равенств была использована приближённая формула $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, справедливая при малых x ($|x| \ll 1$). Поскольку $\angle A_1AB = \frac{\pi}{4}$, отрезки AA_1 и AG равны,

при этом $AA_1 = AG = L\sqrt{2}$. Таким образом, как следует из формулы (19), искомый угол равен

$$\varphi \approx \frac{a}{L\sqrt{2}} \approx \frac{f}{L\sqrt{2}} \approx 7,1 \cdot 10^{-3} \approx 0,4^\circ.$$